АЛГЕБРА

УЧЕБНИК ДЛЯ 8 КЛАССА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Под редакцией С. А. ТЕЛЯКОВСКОГО

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

15-е издание, доработанное

Глава I
РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

Глава II
КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

Глава III
КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава IV
НЕРАВЕНСТВА

Глава V
СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Москва
«Просвещение»
2007

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк,
К. И. Нешков, С. Б. Суворова

Условные обозначения

— текст, который нужно запомнить

— материал, который важно знать

▶ — начало решения задачи

◁ — окончание решения задачи

● — начало обоснования утверждения или вывода формулы

○ — окончание обоснования или вывода

11. — задание обязательного уровня

19. — задание повышенной трудности

— упражнения для повторения

Алгебра : учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений /
А45 [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. — 15-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 2007. — 271 с.: ил. — ISBN 978-5-09-015964-7.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-015964-7

Глава I РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ

§ 1 РАЦИОНАЛЬНЫЕ ДРОБИ И ИХ СВОЙСТВА

1. Рациональные выражения

В курсе алгебры 7 класса мы занимались преобразованиями целых выражений, т. е. выражений, составленных из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания и умножения, а также деления на число, отличное от нуля. Так, целыми являются выражения

$$7a^2b, \quad m^3+n^3, \quad (x-y)(x^2+y^2),$$
$$b^{10}-\frac{b(3b+c)}{7}, \quad \frac{a+5}{8}, \quad 2x:9.$$

В отличие от них выражения

$$4a-\frac{b}{2a+1}, \quad \frac{x+y}{x^2-3xy+y^2},$$
$$\frac{n}{3}-\frac{5}{n^2+1}, \quad 2p:q,$$

помимо действий сложения, вычитания и умножения, содержат деление на выражение с переменными. Такие выражения называют *дробными выражениями.*

Целые и дробные выражения называют *рациональными выражениями.*

Целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных, так как для нахождения значения целого выражения нужно выполнить действия, которые всегда возможны.

Дробное выражение при некоторых значениях переменных может не иметь смысла. Например, выражение $10+\frac{1}{a}$ не имеет смысла при $a=0$. При всех остальных значениях a это выражение имеет смысл. Выражение $x + \frac{y}{x - y}$ имеет смысл при тех значениях x и y, когда $x \neq y$.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют *допустимыми значениями переменных.*

Выражение вида $\frac{a}{b}$ называется, как известно, дробью.

Дробь, числитель и знаменатель которой многочлены, называют *рациональной дробью.*

Примерами рациональных дробей служат дроби

$$\frac{5}{a}, \quad \frac{b-3}{10}, \quad \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}, \quad \frac{3}{m^2 - n^2}.$$

В рациональной дроби допустимыми являются те значения переменных, при которых не обращается в нуль знаменатель дроби.

Пример 1. Найдем допустимые значения переменной в дроби

$$\frac{5}{a(a-9)}.$$

▶ Чтобы найти, при каких значениях a знаменатель дроби обращается в нуль, нужно решить уравнение $a(a - 9) = 0$.
Это уравнение имеет два корня: 0 и 9. Следовательно, допустимыми значениями переменной a являются все числа, кроме 0 и 9. ◁

Пример 2. При каком значении x значение дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x + 6}$ равно нулю?

▶ Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.
Числитель дроби $\frac{(x-2)^2 - 25}{2x + 6}$ равен нулю, если $(x - 2)^2 = 25$, т. е. $x - 2 = 5$ или $x - 2 = -5$. Итак, числитель дроби равен нулю при $x = 7$ и $x = -3$. Знаменатель данной дроби не равен нулю, если $x \neq -3$. Значит, данная дробь равна нулю при $x = 7$. ◁

ИСААК НЬЮТОН (1643—1727) — английский физик, механик, математик и астроном. Сформулировал основные законы классической механики, открыл закон всемирного тяготения, разработал, независимо от Лейбница, основы математического анализа.

Упражнения

1. Какие из выражений $\frac{1}{3}a^2b$, $(x-y)^2-4xy$, $\frac{m+3}{m-3}$, $\frac{8}{x^2+y^2}$, $\frac{a^2-2ab}{12}$, $(c+3)^2+\frac{2}{c}$ являются целыми, какие — дробными?

2. Из рациональных выражений $7x^2-2xy$, $\frac{a}{9}$, $\frac{12}{b}$, $a(a-b)-\frac{b}{3a}$, $\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{3}n^2$, $\frac{a}{a+3}-8$ выпишите те, которые являются:

а) целыми выражениями;
б) дробными выражениями.

3. Найдите значение дроби $\frac{y-1}{4}$ при $y=3$; 1; -5; $\frac{1}{2}$; $-1{,}6$; 100.

4. Найдите значение дроби:

а) $\frac{a-8}{2a+5}$ при $a=-2$; б) $\frac{b^2+6}{2b}$ при $b=3$.

5. Чему равно значение дроби $\frac{(a+b)^2-1}{a^2+1}$ при:

а) $a=-3$, $b=-1$; б) $a=1\frac{1}{2}$, $b=0{,}5$?

6. Заполните таблицу:

x	-13	-5	$-0{,}2$	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x+5}{x-3}$								

7. а) Из формулы $v=\frac{s}{t}$ выразите: переменную s через v и t; переменную t через s и v.

б) Из формулы $\rho=\frac{m}{V}$ выразите переменную V через ρ и m.

8. Из городов A и B, расстояние между которыми s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шел со скоростью v_1 км/ч, а второй — со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s, v_1 и v_2. Найдите значение t, если известно, что:

а) $s=250$, $v_1=60$, $v_2=40$;
б) $s=310$, $v_1=75$, $v_2=80$.

9. Составьте дробь:

а) числитель которой — произведение переменных x и y, а знаменатель — их сумма;

б) числитель которой — разность переменных a и b, а знаменатель — их произведение.

10. При каких значениях переменной имеет смысл рациональное выражение:

а) $\frac{x}{x-2}$; в) $\frac{y^2-1}{y}+\frac{y}{y-3}$;

б) $\frac{b+4}{b^2+7}$; г) $\frac{a+10}{a(a-1)}-1$?

11. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) x^2-8x+9; в) $\frac{3x-6}{7}$; д) $\frac{x-5}{x^2+25}-3x$;

б) $\frac{1}{6x-3}$; г) $\frac{x^2-8}{4x(x+1)}$; е) $\frac{x}{x+8}+\frac{x-8}{x}$.

12. Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{5y-8}{11}$; в) $\frac{y^2+1}{y^2-2y}$; д) $\frac{y}{y-6}+\frac{15}{y+6}$;

б) $\frac{25}{y-9}$; г) $\frac{y-10}{y^2+3}$; е) $\frac{32}{y}-\frac{y+1}{y+7}$.

13. Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{1}{x-2}$; б) $y=\frac{2x+3}{x(x+1)}$; в) $y=x+\frac{1}{x+5}$.

14. При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-3}{5}$ равно:

а) 1; б) 0; в) –1; г) 3?

15. При каких значениях переменной равно нулю значение дроби:

а) $\frac{y-5}{8}$; б) $\frac{2y+3}{10}$; в) $\frac{x(x-1)}{x+4}$; г) $\frac{x(x+3)}{2x+6}$?

16. Определите знак дроби $\frac{a}{b}$, если известно, что:

а) $a>0$ и $b>0$; в) $a<0$ и $b>0$;

б) $a>0$ и $b<0$; г) $a<0$ и $b<0$.

17. Докажите, что при любом значении переменной значение дроби:

а) $\frac{3}{x^2+1}$ положительно; в) $\frac{(a-1)^2}{a^2+10}$ неотрицательно;

б) $\frac{-5}{y^2+4}$ отрицательно; г) $\frac{(b-3)^2}{-b^2-1}$ неположительно.

18. При каком значении a принимает наибольшее значение дробь:
а) $\frac{4}{a^2+5}$; б) $\frac{10}{(a-3)^2+1}$?

19. При каком значении b принимает наименьшее значение дробь:
а) $\frac{b^2+7}{21}$; б) $\frac{(b-2)^2+16}{8}$?

20. Чему равно наибольшее значение дроби $\frac{18}{4x^2+9+y^2+4xy}$? Выберите верный ответ.

1. Равно 0 2. Равно 1 3. Равно 2 4. Равно 3

21. Преобразуйте в многочлен:
а) $(2a+3)(2a-3)$; г) $(b+0{,}5)^2$;
б) $(y-5b)(y+5b)$; д) $(a-2x)^2$;
в) $(0{,}8x+y)(y-0{,}8x)$; е) $(ab-1)^2$.

22. Разложите на множители:
а) x^2-25; в) a^2-6a+9; д) a^3-8;
б) $16-c^2$; г) $x^2+8x+16$; е) b^3+27.

2. Основное свойство дроби. Сокращение дробей

Мы знаем, что для обыкновенных дробей выполняется следующее свойство: если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же натуральное число, то значение дроби не изменится. Иначе говоря, при любых натуральных значениях a, b и c верно равенство $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$.

Докажем, что это равенство верно не только при натуральных, но и при любых других значениях a, b и c, при которых знаменатель отличен от нуля, т. е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$.

● Пусть $\frac{a}{b}=m$. Тогда по определению частного $a=bm$. Умножим обе части этого равенства на c:

$$ac=(bm)c.$$

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения имеем:

$$ac = (bc)m.$$

Так как $bc \neq 0$, то по определению частного

$$\frac{ac}{bc} = m.$$

Значит,

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \bigcirc$$

Мы показали, что для любых числовых значений переменных a, b и c, где $b \neq 0$ и $c \neq 0$, верно равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}. \qquad (1)$$

Равенство (1) сохраняет силу и в том случае, когда под буквами a, b и c понимают многочлены, причем b и c — *ненулевые многочлены*, т. е. многочлены, не равные тождественно нулю.

Равенство (1) выражает *основное свойство рациональной дроби*:

если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получится равная ей дробь.

Например,

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x+y)}{(x-3)(x+y)}.$$

Это равенство верно при всех допустимых значениях переменных. Такие равенства будем называть *тождествами*. Ранее тождествами мы называли равенства, верные при всех значениях переменных. Теперь мы расширяем понятие тождества.

Определение. Тождеством называется равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Основное свойство рациональной дроби позволяет выполнять приведение дроби к новому знаменателю и сокращение дробей.

Приведем примеры.

Пример 1. Приведем дробь $\frac{2x}{7y}$ к знаменателю $35y^3$.

▶ Так как $35y^3 = 7y \cdot 5y^2$, то, умножив числитель и знаменатель дроби $\frac{2x}{7y}$ на $5y^2$, получим:

$$\frac{2x}{7y} = \frac{2x \cdot 5y^2}{7y \cdot 5y^2} = \frac{10xy^2}{35y^3}. \quad \triangleleft$$

Множитель $5y^2$ называют дополнительным множителем к числителю и знаменателю дроби $\frac{2x}{7y}$.

Пример 2. Приведем дробь $\frac{5}{2y - x}$ к знаменателю $x - 2y$.

▶ Для этого числитель и знаменатель данной дроби умножим на -1:

$$\frac{5}{2y - x} = \frac{5 \cdot (-1)}{(2y - x) \cdot (-1)} = \frac{-5}{x - 2y}.$$

Дробь $\frac{-5}{x - 2y}$ можно заменить тождественно равным выражением $-\frac{5}{x - 2y}$, поставив знак «минус» перед дробью и изменив знак в числителе:

$$\frac{-5}{x - 2y} = -\frac{5}{x - 2y}. \quad \triangleleft$$

Вообще

> **если изменить знак числителя (или знак знаменателя) дроби и знак перед дробью, то получим выражение, тождественно равное данному.**

Пример 3. Сократим дробь $\frac{a^2 - 9}{ab + 3b}$.

▶ Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$\frac{a^2 - 9}{ab + 3b} = \frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)}.$$

Сократим полученную дробь на общий множитель $a + 3$:

$$\frac{(a + 3)(a - 3)}{b(a + 3)} = \frac{a - 3}{b}.$$

Итак,

$$\frac{a^2-9}{ab+3b}=\frac{a-3}{b}. \ \triangleleft$$

Пример 4. Построим график функции $y=\dfrac{x^2-16}{2x-8}$.

▶ Область определения функции $y=\dfrac{x^2-16}{2x-8}$ — множество всех чисел, кроме числа 4. Сократим дробь $\dfrac{x^2-16}{2x-8}$:

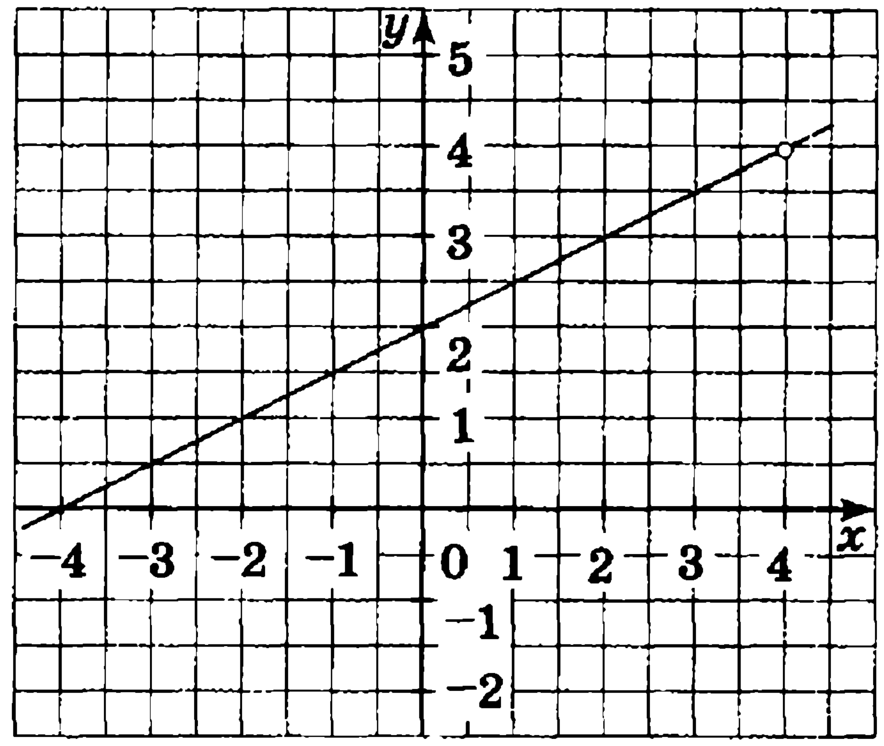


Рис. 1

$$\frac{x^2-16}{2x-8}=\frac{(x-4)(x+4)}{2(x-4)}=\frac{x+4}{2}.$$

Графиком функции $y=\dfrac{x+4}{2}$ является прямая, а графиком функции $y=\dfrac{x^2-16}{2x-8}$ — та же прямая, но с «выколотой» точкой (4; 4) (рис. 1). ◁

Упражнения

23. Укажите общий множитель числителя и знаменателя и сократите дробь:

а) $\dfrac{2x}{3x}$; б) $\dfrac{15x}{25y}$; в) $\dfrac{6a}{24a}$; г) $\dfrac{7ab}{21bc}$; д) $\dfrac{-2xy}{5x^2y}$; е) $\dfrac{8x^2y^2}{24xy}$.

24. Сократите дробь:

а) $\dfrac{10xz}{15yz}$; б) $\dfrac{6ab^2}{9bc^2}$; в) $\dfrac{2ay^3}{-4a^2b}$; г) $\dfrac{-6p^2q}{-2q^3}$; д) $\dfrac{24a^2c^2}{36ac}$; е) $\dfrac{63x^2y^3}{42x^6y^4}$.

25. Представьте частное в виде дроби и сократите ее:

а) $4a^2b^3 : (2a^4b^2)$;
б) $3xy^2 : (6x^3y^3)$;
в) $24p^4q^4 : (48p^2q^2)$;
г) $36m^2n : (18mn)$;
д) $-32b^5c : (12b^4c^2)$;
е) $-6ax : (-18ax)$.

26. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4a^2}{6ac}$; б) $\dfrac{7x^2y}{21xy^2}$; в) $\dfrac{56m^2n^5}{35mn^5}$; г) $\dfrac{25p^4q}{100p^5q}$.

27. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{8^{16}}{16^{12}}$; б) $\dfrac{81^{25}}{27^{33}}$.

28. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a(b-2)}{5(b-2)}$; б) $\dfrac{3(x+4)}{c(x+4)}$; в) $\dfrac{ab(y+3)}{a^2b(y+3)}$; г) $\dfrac{15a(a-b)}{20b(a-b)}$.

29. Разложите на множители числитель и знаменатель дроби и сократите ее:

а) $\dfrac{3a+12b}{6ab}$; в) $\dfrac{2a-4}{3(a-2)}$; д) $\dfrac{a-3b}{a^2-3ab}$;

б) $\dfrac{15b-20c}{10b}$; г) $\dfrac{5x(y+2)}{6y+12}$; е) $\dfrac{3x^2+15xy}{x+5y}$.

30. Сократите дробь:

а) $\dfrac{y^2-16}{3y+12}$; в) $\dfrac{(c+2)^2}{7c^2+14c}$; д) $\dfrac{a^2+10a+25}{a^2-25}$;

б) $\dfrac{5x-15y}{x^2-9y^2}$; г) $\dfrac{6cd-18c}{(d-3)^2}$; е) $\dfrac{y^2-9}{y^2-6y+9}$.

31. Сократите дробь:

а) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$; б) $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$.

32. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{15a^2-10ab}{3ab-2b^2}$ при $a=-2$, $b=-0{,}1$;

б) $\dfrac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd^2}$ при $c=\dfrac{2}{3}$, $d=\dfrac{1}{2}$;

в) $\dfrac{6x^2+12xy}{5xy+10y^2}$ при $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-0{,}4$;

г) $\dfrac{x^2+6xy+9y^2}{4x^2+12xy}$ при $x=-0{,}2$, $y=-0{,}6$.

33. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-2x}$; б) $\dfrac{3y^2+24y}{y^2+16y+64}$; в) $\dfrac{a^2+a+1}{a^3-1}$; г) $\dfrac{b+2}{b^3+8}$.

34. Представьте частное в виде дроби и сократите ее:

а) $(9x^2-y^2):(3x+y)$; в) $(x^2+2x+4):(x^3-8)$;

б) $(2ab-a):(4b^2-4b+1)$; г) $(1+a^3):(1+a)$.

35. Сократите дробь:

а) $\dfrac{2x + bx - 2y - by}{7x - 7y}$; в) $\dfrac{xy - x + y - y^2}{x^2 - y^2}$;

б) $\dfrac{8a + 4b}{2ab + b^2 - 2ad - bd}$; г) $\dfrac{a^2 + 2ac + c^2}{a^2 + ac - ax - cx}$.

36. Постройте график функции:

а) $y = \dfrac{x^2 - 25}{2x + 10}$; б) $y = \dfrac{x^3 - 9x}{x^2 - 9}$.

37. Какой из графиков, изображенных на рисунке 2, является графиком функции $y = \dfrac{(1 - x)^2}{x - 1}$?

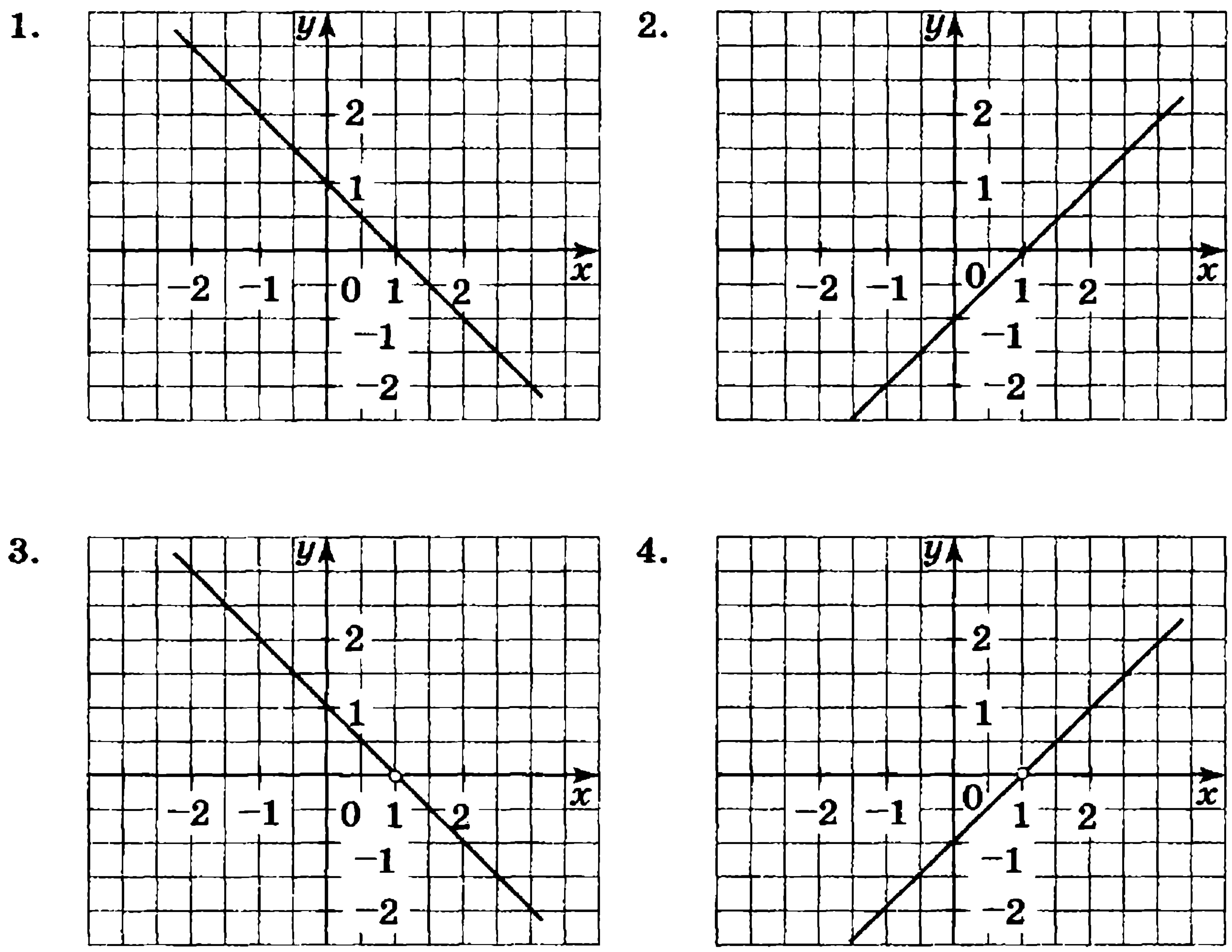


Рис. 2

38. Из выражений $\dfrac{-x}{-y}$, $\dfrac{-x}{y}$, $\dfrac{x}{-y}$, $-\dfrac{-x}{y}$ выпишите те, которые:

а) тождественно равны дроби $\dfrac{x}{y}$;

б) противоположны дроби $\dfrac{x}{y}$.

39. Упростите выражение:

а) $\frac{a-b}{b-a}$; в) $\frac{(a-b)^2}{b-a}$; д) $\frac{(-a-b)^2}{a+b}$;

б) $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$; г) $\frac{a-b}{(b-a)^2}$; е) $\frac{(a+b)^2}{(-a-b)^2}$.

40. Сократите дробь:

а) $\frac{a(x-2y)}{b(2y-x)}$; г) $\frac{7b-14b^2}{42b^2-21b}$; ж) $\frac{8b^2-8a^2}{a^2-2ab+b^2}$;

б) $\frac{5x(x-y)}{x^3(y-x)}$; д) $\frac{25-a^2}{3a-15}$; з) $\frac{(b-2)^3}{(2-b)^2}$.

в) $\frac{3a-36}{12b-ab}$; е) $\frac{3-3x}{x^2-2x+1}$;

41. Сократите дробь:

а) $\frac{ax+bx-ay-by}{bx-by}$; б) $\frac{ab-3b-2a+6}{15-5a}$.

42. Упростите выражение:

а) $\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$; б) $\frac{y^6-y^8}{y^4-y^2}$; в) $\frac{b^7-b^{10}}{b^5-b^2}$; г) $\frac{c^6-c^4}{c^3-c^2}$.

43. Найдите значение выражения:

а) $\frac{a^8+a^5}{a^5+a^2}$ при $a=-\frac{1}{2}$; б) $\frac{b^{10}-b^8}{b^8-b^6}$ при $b=-0{,}1$.

44. Сократите дробь:

а) $\frac{(2a-2b)^2}{a-b}$; б) $\frac{(3c+9d)^2}{c+3d}$; в) $\frac{(3x+6y)^2}{5x+10y}$; г) $\frac{4x^2-y^2}{(10x+5y)^2}$.

45. Сократите дробь (n — натуральное число):

а) $\frac{2^{2n-1}+2^{2n+1}}{5\cdot 2^n}$; б) $\frac{7^{2n+1}+7^{2n-1}}{100\cdot 7^{n-1}}$.

46. Докажите, что значение дроби не зависит от n, где n — натуральное число:

а) $\frac{3^{n+2}-3^n}{3^{n+2}+3^{n+1}+3^n}$; б) $\frac{16^{n+1}-2^{n+4}}{4\cdot 2^n(2^{3n}-1)}$.

47. Приведите к знаменателю $24a^3b^2$ следующие дроби:

$$\frac{5b}{8a^3},\quad \frac{7a}{3b^2},\quad \frac{1}{2ab},\quad \frac{2}{a^2b^2}.$$

48. Представьте выражение $2a+b$ в виде дроби со знаменателем равным:

а) b; б) 5; в) $3a$; г) $2a-b$.

49. Приведите дробь:

а) $\frac{x}{a-b}$ к знаменателю $(a-b)^2$;

б) $\frac{y}{x-a}$ к знаменателю x^2-a^2;

в) $\frac{a}{a-10}$ к знаменателю $10-a$;

г) $\frac{p}{p-2}$ к знаменателю $4-p^2$.

П

50. Решите уравнение:

а) $-5x=16$; в) $\frac{1}{3}x=4$; д) $0{,}6x=3$;

б) $2x=\frac{1}{5}$; г) $4x=-2$; е) $-0{,}7x=5$.

51. Разложите на множители:

а) $5bc-5c$; г) $5y-5x+y^2-xy$; ж) y^2-2y+1;

б) $10n+15n^2$; д) a^2-9; з) a^3+64;

в) $8ab+12bc$; е) $x^2+10x+25$; и) b^3-1.

52. Расположите выражения

$$\frac{5}{16}:6,\quad \frac{5}{16}\cdot 0{,}1,\quad \frac{5}{16}\cdot(-7)$$

в порядке возрастания их значений.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры целых выражений; дробных выражений.
2. Какую дробь называют рациональной? Приведите пример.
3. Дайте определение тождества. Приведите пример.
4. Сформулируйте и докажите основное свойство дроби.
5. Сформулируйте правило об изменении знака перед дробью.

3. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

При сложении обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями складывают их числители, а знаменатель оставляют прежним. Например:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}.$$

Таким же образом складывают любые рациональные дроби с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c},$$

где a, b и c — многочлены, причем c — ненулевой многочлен.

Это равенство выражает правило сложения рациональных дробей с одинаковыми знаменателями:

чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

Вычитание рациональных дробей выполняется аналогично сложению:

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Чтобы выполнить вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями, надо из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{3a-7b}{15ab}$ и $\frac{2a+2b}{15ab}$.

▶ $$\frac{3a-7b}{15ab}+\frac{2a+2b}{15ab}=\frac{3a-7b+2a+2b}{15ab}=\frac{5a-5b}{15ab}=\frac{5(a-b)}{15ab}=\frac{a-b}{3ab}.$$ ◁

Пример 2. Вычтем из дроби $\frac{a^2+9}{5a-15}$ дробь $\frac{6a}{5a-15}$.

▶ $\frac{a^2+9}{5a-15} - \frac{6a}{5a-15} = \frac{a^2+9-6a}{5a-15} = \frac{(a-3)^2}{5(a-3)} = \frac{a-3}{5}$. ◁

Пример 3. Упростим выражение

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x}.$$

▶ Здесь удобно сложение и вычитание дробей выполнять не после довательно, а совместно:

$$\frac{x^2-3}{x^2+2x} + \frac{2}{x^2+2x} - \frac{2x-1}{x^2+2x} = \frac{x^2-3+2-(2x-1)}{x^2+2x} =$$

$$= \frac{x^2-1-2x+1}{x^2+2x} = \frac{x^2-2x}{x^2+2x} = \frac{x(x-2)}{x(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}. \ ◁$$

Пример 4. Сложим дроби $\frac{3a}{2x-a}$ и $\frac{6x}{a-2x}$.

▶ Знаменатели дробей являются противоположными выражениями. Изменим знаки в знаменателе второй дроби и перед этой дробью. Получим

$$\frac{6x}{a-2x} = -\frac{6x}{2x-a}.$$

Теперь можно применить правило вычитания дробей с одинако- гыми знаменателями:

$$\frac{3a}{2x-a} + \frac{6x}{a-2x} =$$

$$= \frac{3a}{2x-a} - \frac{6x}{2x-a} = \frac{3a-6x}{2x-a} = \frac{-3(2x-a)}{2x-a} = -3. \ ◁$$

Упражнения

53. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{x}{3} + \frac{y}{3}$; б) $\frac{5b^2}{a} - \frac{13b^2}{a}$; в) $\frac{x+y}{9} - \frac{x}{9}$; г) $\frac{2c-x}{b} + \frac{x}{b}$.

54. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{m}{2p} - \frac{m-p}{2p}$; в) $\frac{7y-13}{10y} - \frac{2y+3}{10y}$;

б) $\frac{a+b}{6} - \frac{a-2b}{6}$; г) $\frac{8c+25}{6c} + \frac{5-2c}{6c}$.

55. Преобразуйте выражение, представив его в виде дроби:

а) $\dfrac{2x-3y}{4xy}+\dfrac{11y-2x}{4xy}$; в) $\dfrac{a-2}{8a}+\dfrac{2a+5}{8a}-\dfrac{3-a}{8a}$;

б) $\dfrac{5a+b^5}{8b}-\dfrac{5a-7b^5}{8b}$; г) $\dfrac{11a-2b}{4a}+\dfrac{2a-3b}{4a}-\dfrac{a-b}{4a}$.

56. Упростите выражение:

а) $\dfrac{17-12x}{x}+\dfrac{10-x}{x}$; г) $\dfrac{3p-q}{5p}-\dfrac{2p+6q}{5p}+\dfrac{p-4q}{5p}$;

б) $\dfrac{12p-1}{3p^2}-\dfrac{1-3p}{3p^2}$; д) $\dfrac{5c-2d}{4c}-\dfrac{3d}{4c}+\dfrac{d-5c}{4c}$;

в) $\dfrac{6y-3}{5y}-\dfrac{y+2}{5y}$; е) $\dfrac{2a}{b}-\dfrac{1-6a}{b}+\dfrac{13-8a}{b}$.

57. Упростите выражение:

а) $\dfrac{16}{x-4}-\dfrac{x^2}{x-4}$; в) $\dfrac{3a-1}{a^2-b^2}-\dfrac{3b-1}{a^2-b^2}$; д) $\dfrac{2a+b}{(a-b)^2}+\dfrac{2b-5a}{(a-b)^2}$;

б) $\dfrac{25}{a+5}-\dfrac{a^2}{a+5}$; г) $\dfrac{x-3}{x^2-64}+\dfrac{11}{x^2-64}$; е) $\dfrac{13x+6y}{(x+y)^2}-\dfrac{11x+4y}{(x+y)^2}$.

58. Докажите, что:

а) выражение $\dfrac{(a+b)^2}{ab}-\dfrac{(a-b)^2}{ab}$ тождественно равно 4;

б) выражение $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+b^2}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ тождественно равно 2.

59. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{a^2-43}{a-6}+\dfrac{7}{a-6}$ при $a=10{,}25$;

б) $\dfrac{9b-1}{b^2-9}-\dfrac{6b-10}{b^2-9}$ при $b=3{,}5$.

60. Найдите значение выражения

$\dfrac{a^2-12b}{a^2-3ab}-\dfrac{3ab-4a}{a^2-3ab}$ при $a=-0{,}8$, $b=-1{,}75$.

Нет ли в задаче лишних данных?

61. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x}{y-1}+\dfrac{5}{1-y}$; в) $\dfrac{2m}{m-n}+\dfrac{2n}{n-m}$; д) $\dfrac{a^2+16}{a-4}+\dfrac{8a}{4-a}$;

б) $\dfrac{a}{c-3}-\dfrac{6}{3-c}$; г) $\dfrac{5p}{2q-p}+\dfrac{10q}{p-2q}$; е) $\dfrac{x^2+9y^2}{x-3y}+\dfrac{6xy}{3y-x}$.

62. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\dfrac{10p}{p-q}+\dfrac{3p}{q-p}$; в) $\dfrac{x-3}{x-1}-\dfrac{2}{1-x}$; д) $\dfrac{a}{a^2-9}+\dfrac{3}{9-a^2}$;

б) $\dfrac{5a}{a-b}+\dfrac{5b}{b-a}$; г) $\dfrac{a}{2a-b}+\dfrac{3a-b}{b-2a}$; е) $\dfrac{y^2}{y-1}+\dfrac{1}{1-y}$.

63. Докажите, что при всех допустимых значениях x значение выражения не зависит от x:

а) $\dfrac{3x+5}{2x-1}+\dfrac{7x+3}{1-2x}$; б) $\dfrac{5x+1}{5x-20}+\dfrac{x+17}{20-5x}$.

64. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2}{(x-5)^2}-\dfrac{25}{(5-x)^2}$; б) $\dfrac{x^2+25}{(x-5)^3}+\dfrac{10x}{(5-x)^3}$.

65. Преобразуйте выражение:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-16}-\dfrac{8(x-2)}{x^2-16}$; б) $\dfrac{64-2ab}{(a-8)^2}+\dfrac{2ab-a^2}{(8-a)^2}$.

66. Пользуясь тождеством $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$, представьте дробь в виде суммы дробей:

а) $\dfrac{a+b}{x}$; б) $\dfrac{2a^2+a}{y}$; в) $\dfrac{x^2+6y^2}{2xy}$; г) $\dfrac{12a+y^2}{6ay}$.

67. Представьте дробь в виде суммы или разности дробей:

а) $\dfrac{x^2+y^2}{x^4}$; б) $\dfrac{2x-y}{b}$; в) $\dfrac{a^2+1}{2a}$; г) $\dfrac{a^2-3ab}{a^3}$.

68. Представьте дробь $\dfrac{5n^2+3n+6}{n}$ в виде суммы двучлена и дроби. Выясните, при каких натуральных n данная дробь принимает натуральные значения.

69. При каких целых значениях m дробь $\dfrac{(m-1)(m+1)-10}{m}$ принимает целые значения?

70. Решите уравнение:

а) $3(5x-4)-8x=4x+9$;
б) $19x-8(x-3)=66-3x$;
в) $0{,}2(0{,}7x-5)+0{,}02=1{,}4(x-1{,}6)$;
г) $2{,}7(0{,}1x+3{,}2)+0{,}6(1{,}3-x)=16{,}02$.

71. Разложите на множители:

а) $8x^4 - 16x^3y$; г) $18b^2 - 98a^2$; ж) $ab + 8a + 9b + 72$;

б) $15xy^5 + 10y^2$; д) $x^3 - 125$; з) $6m - 12 - 2n + mn$.

в) $8a^2 - 50y^2$; е) $y^3 + 8$;

72. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\dfrac{3a}{2a + 25}$; б) $\dfrac{2y}{9 + y^2}$; в) $\dfrac{5x}{3x(x + 12)}$; г) $\dfrac{7a}{(a + 1)(a - 4)}$.

4. Сложение и вычитание дробей с разными знаменателями

Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями сводится к сложению и вычитанию рациональных дробей с одинаковыми знаменателями. Для этого данные дроби приводят к общему знаменателю.

Пример 1. Сложим дроби $\dfrac{x}{4a^3b}$ и $\dfrac{5}{6ab^4}$.

▶ Знаменатели дробей представляют собой одночлены. Наиболее простым общим знаменателем является одночлен $12a^3b^4$. Коэффициент этого одночлена равен наименьшему общему кратному коэффициентов знаменателей дробей, а каждая переменная взята с наибольшим показателем, с которым она входит в знаменатели дробей. Дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны $3b^3$ и $2a^2$.

Имеем

$$\frac{x}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^4} = \frac{x \cdot 3b^3 + 5 \cdot 2a^2}{12a^3b^4} = \frac{3b^3x + 10a^2}{12a^3b^4}. \quad \triangleleft$$

Пример 2. Преобразуем разность $\dfrac{a + 3}{a^2 + ab} - \dfrac{b - 3}{ab + b^2}$.

▶ Чтобы найти общий знаменатель, разложим знаменатель каждой дроби на множители:

$$\frac{a + 3}{a^2 + ab} - \frac{b - 3}{ab + b^2} = \frac{a + 3}{a(a + b)} - \frac{b - 3}{b(a + b)}.$$

Простейшим общим знаменателем служит выражение $ab(a + b)$. Дополнительные множители к числителям и знаменателям этих дробей соответственно равны b и a.

Имеем

$$\frac{a+3}{a^2+ab}-\frac{b-3}{ab+b^2}=\frac{a+3}{a(a+b)}-\frac{b-3}{b(a+b)}=$$

$$=\frac{(a+3)b-(b-3)a}{ab(a+b)}=\frac{ab+3b-ab+3a}{ab(a+b)}=\frac{3(a+b)}{ab(a+b)}=\frac{3}{ab}. \lhd$$

Преобразование рационального выражения, которое является суммой или разностью целого выражения и дроби, сводится к преобразованию суммы или разности дробей.

Пример 3. Упростим выражение $a-1-\frac{a^2-3}{a+1}$.

▶ Представим выражение $a-1$ в виде дроби со знаменателем 1 и выполним вычитание дробей:

$$a-1-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{a-1}{1}-\frac{a^2-3}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)-(a^2-3)}{a+1}=$$

$$=\frac{a^2-1-a^2+3}{a+1}=\frac{2}{a+1}. \lhd$$

Упражнения

73. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$; в) $\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a}$; д) $\frac{5x}{8y}+\frac{x}{4y}$;

б) $\frac{c}{4}-\frac{d}{12}$; г) $\frac{3}{2x}-\frac{2}{3x}$; е) $\frac{17y}{24c}-\frac{25y}{36c}$.

74. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{5y-3}{6y}+\frac{y+2}{4y}$; в) $\frac{b+2}{15b}-\frac{3c-5}{45c}$;

б) $\frac{3x+5}{35x}+\frac{x-3}{21x}$; г) $\frac{8b+y}{40b}-\frac{6y+b}{30y}$.

75. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{15a-b}{12a}-\frac{a-4b}{9a}$; б) $\frac{7x+4}{8y}-\frac{3x-1}{6y}$.

76. Выполните сложение или вычитание:

а) $\frac{b}{a^2}-\frac{1}{a}$; в) $\frac{1}{2a^7}+\frac{4-2a^3}{a^{10}}$; д) $\frac{2a-3b}{a^2b}+\frac{4a-5b}{ab^2}$;

б) $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2}+\frac{a-b}{ab}$; е) $\frac{x-2y}{xy^2}-\frac{2y-x}{x^2y}$.

77. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{2xy-1}{4x^3}-\frac{3y-x}{6x^2}$; в) $\frac{1}{3a^3}-\frac{2}{5a^5}$;

б) $\frac{1-b^2}{3ab}+\frac{2b^3-1}{6ab^2}$; г) $\frac{b^2}{6x^5}-\frac{b}{3x^6}$.

78. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$; в) $\frac{b-a}{ab}+\frac{c-b}{bc}-\frac{c-a}{ac}$;

б) $\frac{ab-b}{a}-\frac{ab-a}{b}-\frac{a^2-b^2}{ab}$; г) $\frac{3ab+2b^2}{ab}-\frac{a+2b}{a}+\frac{a-2b}{b}$.

79. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{x-y}{xy}-\frac{x-z}{xz}$; в) $\frac{p-q}{p^3q^2}-\frac{p+q}{p^2q^3}$;

б) $\frac{a-2b}{3b}-\frac{b-2a}{3a}$; г) $\frac{3m-n}{3m^2n}-\frac{2n-m}{2mn^2}$.

80. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $x+\frac{1}{y}$; в) $3a-\frac{a}{4}$; д) $\frac{a^2+b}{a}-a$; ж) $\frac{(a-b)^2}{2a}+b$;

б) $\frac{1}{a}-a$; г) $5b-\frac{2}{b}$; е) $2p-\frac{4p^2+1}{2p}$; з) $c-\frac{(b+c)^2}{2b}$.

81. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $5-\frac{c}{2}$; в) $a+b-\frac{a-3}{3}$;

б) $5y^2-\frac{15y^2-1}{3}$; г) $\frac{2b^2-1}{b}-b+5$.

82. Представьте в виде дроби:

а) $1-\frac{a}{5}-\frac{b}{4}$; г) $4a-\frac{a-1}{4}-\frac{a+2}{3}$;

б) $12-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$; д) $\frac{a+b}{4}-a+b$;

в) $\frac{a-2}{2}-1-\frac{a-3}{3}$; е) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a}$.

83. Упростите выражение:

а) $x-\frac{x-y}{2}+\frac{x+y}{4}$; в) $3-\frac{2x-y}{4}+\frac{x+4y}{12}$;

б) $\frac{3}{x}-2-\frac{5}{x}$; г) $\frac{6a-4b}{5}-\frac{b+7a}{3}-2$.

84. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{b-c}{b}+\frac{b}{b+c}$; в) $\frac{m}{m-n}-\frac{n}{m+n}$; д) $\frac{a}{a+2}-\frac{a}{a-2}$;

б) $\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+3}{x}$; г) $\frac{2a}{2a-1}-\frac{1}{2a+1}$; е) $\frac{p}{3p-1}-\frac{p}{1+3p}$.

85. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\frac{3x}{5(x+y)}-\frac{2y}{3(x+y)}$; в) $\frac{3}{ax-ay}+\frac{2}{by-bx}$;

б) $\frac{a^2}{5(a-b)}-\frac{b^2}{4(a-b)}$; г) $\frac{13c}{bm-bn}-\frac{12b}{cn-cm}$.

86. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{p}{2x+1}-\frac{p}{3x-2}$; в) $\frac{a}{5x-10}+\frac{a}{6x-12}$;

б) $\frac{6a}{x-2y}+\frac{2a}{x+y}$; г) $\frac{5b}{12a-36}-\frac{b}{48-16a}$.

87. Докажите, что при всех допустимых значениях y значение выражения не зависит от y:

а) $\frac{5y+3}{2y+2}-\frac{7y+4}{3y+3}$; б) $\frac{11y+13}{3y-3}+\frac{15y+17}{4-4y}$.

88. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2}{ax-x^2}+\frac{x}{x-a}$; б) $\frac{b^2-4by}{2y^2-by}-\frac{4y}{b-2y}$.

89. Упростите выражение:

а) $\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{ab+b^2}$; б) $\frac{1}{b^2-ab}-\frac{1}{ab-a^2}$.

90. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $1-\frac{a+b}{a-b}$; в) $m-n+\frac{n^2}{m+n}$; д) $x-\frac{9}{x-3}-3$;

б) $\frac{a^2+b^2}{a-b}-a$; г) $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$; е) $a^2-\frac{a^4+1}{a^2-1}+1$.

91. Выполните вычитание дробей:

а) $\frac{a^2+3a}{ab-5b+8a-40}-\frac{a}{b+8}$; б) $\frac{y}{3x-2}-\frac{3y}{6xy+9x-4y-6}$.

92. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\frac{c}{b-c}+\frac{b^2-3bc}{b^2-c^2}$; б) $\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}$.

93. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\dfrac{b-6}{4-b^2}+\dfrac{2}{2b-b^2}$; в) $\dfrac{x-12a}{x^2-16a^2}-\dfrac{4a}{4ax-x^2}$;

б) $\dfrac{b}{ab-5a^2}-\dfrac{15b-25a}{b^2-25a^2}$; г) $\dfrac{a-30y}{a^2-100y^2}-\dfrac{10y}{10ay-a^2}$.

94. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a+4}{a^2-2a}-\dfrac{a}{a^2-4}$; в) $\dfrac{(a+b)^2}{a^2+ab}+\dfrac{(a-b)^2}{a^2-ab}$;

б) $\dfrac{4-x^2}{16-x^2}-\dfrac{x+1}{x+4}$; г) $\dfrac{x^2-4}{5x-10}-\dfrac{x^2+4x+4}{5x+10}$.

95. Упростите выражение и найдите его значение при $x=-1{,}5$:

а) $\dfrac{x+1}{x^2-x}-\dfrac{x+2}{x^2-1}$; б) $\dfrac{x+2}{x^2+3x}-\dfrac{1+x}{x^2-9}$.

96. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{4}{y+2}-\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{12}{y^2-4}$; в) $\dfrac{x^2}{(x-y)^2}-\dfrac{x+y}{2x-2y}$;

б) $\dfrac{a}{a-6}-\dfrac{3}{a+6}+\dfrac{a^2}{36-a^2}$; г) $\dfrac{b}{(a-b)^2}-\dfrac{a+b}{b^2-ab}$.

97. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\dfrac{2a+b}{2a^2-ab}-\dfrac{16a}{4a^2-b^2}-\dfrac{2a-b}{2a^2+ab}$;

б) $\dfrac{1}{(a-3)^2}-\dfrac{2}{a^2-9}+\dfrac{1}{(a+3)^2}$;

в) $\dfrac{x-2}{x^2+2x+4}-\dfrac{6x}{x^3-8}+\dfrac{1}{x-2}$;

г) $\dfrac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}-\dfrac{3}{a-1}$.

98. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{a-4b}-\dfrac{1}{a+4b}-\dfrac{2a}{16b^2-a^2}$; б) $\dfrac{1}{2b-2a}+\dfrac{1}{2b+2a}+\dfrac{a^2}{a^2b-b^3}$;

99. Докажите, что тождественно равны выражения:

а) $\dfrac{3}{a^2-3a}+\dfrac{a^2}{a-3}$ и $a+3+\dfrac{9a+3}{a^2-3a}$;

б) $\dfrac{a^3}{a^2-4}-\dfrac{a}{a-2}-\dfrac{2}{a+2}$ и $a-1$.

100. Докажите, что при любых допустимых значениях переменной значение выражения:

а) $\dfrac{x^3 + 3x}{x + 2} - \dfrac{3x^2 - 14x + 16}{x^2 - 4} + 2x$ является положительным числом;

б) $y + \dfrac{2y^2 + 3y + 1}{y^2 - 1} - \dfrac{y^3 + 2y}{y - 1}$ является отрицательным числом.

101. Учащимся была поставлена задача: «Представить дробь $\dfrac{x^2 + 7x - 25}{x - 5}$ в виде суммы целого выражения и дроби». Были получены ответы:

1. $x + 5 + \dfrac{7x}{x - 5}$ 2. $x + 12 + \dfrac{35}{x - 5}$ 3. $-x + \dfrac{2x - 25}{x - 5}$ 4. $x + \dfrac{12x - 25}{x - 5}$

Укажите неверный ответ.

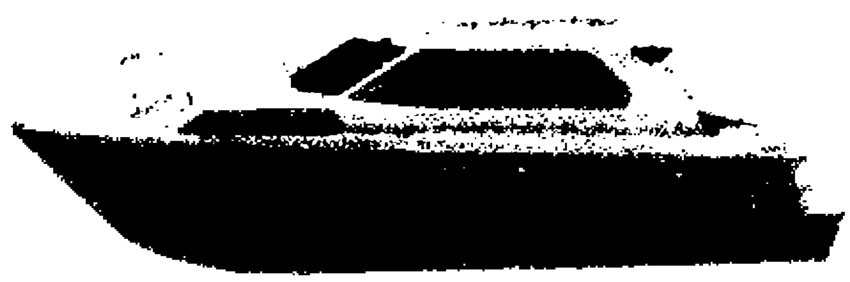
102. Докажите тождество

$$\frac{1}{x + n} - \frac{1}{x + n + 1} = \frac{1}{(x + n)(x + n + 1)}.$$

Используя это тождество, упростите выражение

$$\frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)(x + 3)} + \frac{1}{(x + 3)(x + 4)}.$$

103. Две речные пристани A и B расположены на расстоянии s км друг от друга. Между ними курсирует катер, скорость которого в стоячей воде равна v км/ч. Сколько времени t (ч) потребуется катеру на путь от A до B и обратно, если скорость течения реки равна 5 км/ч? Найдите t при:



а) $s = 50$, $v = 25$;

б) $s = 105$, $v = 40$.

104. Туристы прошли s км по шоссе со скоростью v км/ч и вдвое больший путь по проселочной дороге. Сколько времени t (ч) затратили туристы, если известно, что по проселочной дороге они шли со скоростью, на 2 км/ч меньшей, чем по шоссе? Найдите t при $s = 10$, $v = 6$.

105. Функция задана формулой $y = \dfrac{2x - 5}{3}$. Найдите значение функции при x, равном -2; 0; 16. При каком x значение функции равно 3; 0; -9?

106. Постройте графики функций $y = -4x + 1$ и $y = 2x - 3$ и найдите координаты точки их пересечения. Ту же задачу решите без построения графиков. Сравните полученные ответы.

107. В одну силосную яму заложили 90 т силоса, а в другую — 75 т. Когда из первой ямы взяли силоса в 3 раза больше, чем из второй, в первой яме силоса осталось в 2 раза меньше, чем во второй. Сколько тонн силоса взяли из первой ямы?

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.
2. Сформулируйте правило вычитания дробей с одинаковыми знаменателями.
3. Как выполняют сложение и вычитание дробей с разными знаменателями?

§ 3 ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЧАСТНОЕ ДРОБЕЙ

5. Умножение дробей. Возведение дроби в степень

При умножении обыкновенных дробей перемножают отдельно их числители и их знаменатели и первое произведение записывают в числителе, а второе — в знаменателе дроби. Например:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}.$$

Таким же образом перемножают любые рациональные дроби:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причем b и d — ненулевые многочлены. Это равенство выражает *правило умножения рациональных дробей*:

чтобы умножить дробь на дробь, нужно перемножить их числители и перемножить их знаменатели и первое произведение записать числителем, а второе — знаменателем дроби.

Пример 1. Умножим дробь $\frac{a^3}{4b^2}$ на дробь $\frac{6b}{a^2}$.

▶ Воспользуемся правилом умножения дробей:

$$\frac{a^3}{4b^2}\cdot\frac{6b}{a^2}=\frac{a^3\cdot 6b}{4b^2\cdot a^2}=\frac{3a}{2b}. \lhd$$

Пример 2. Умножим дробь $\frac{pm+2p}{m}$ на дробь $\frac{pm^2}{m^2-4}$.

▶ Имеем

$$\frac{pm+2p}{m}\cdot\frac{pm^2}{m^2-4}=\frac{p(m+2)\cdot pm^2}{m\cdot(m-2)(m+2)}=\frac{p^2m}{m-2}. \lhd$$

Пример 3. Представим произведение $\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x}$ в виде рациональной дроби.

▶ Имеем

$$\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x+1}{x}=\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot x}=\frac{x^2-1}{x^2+2x}. \lhd$$

Пример 4. Умножим дробь $\frac{x+a}{x-a}$ на многочлен x^2-a^2.

▶ При умножении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби и затем применяют правило умножения дробей:

$$\frac{x+a}{x-a}\cdot(x^2-a^2)=\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{x^2-a^2}{1}=\frac{(x+a)(x-a)(x+a)}{x-a}=(x+a)^2. \lhd$$

Правило умножения дробей распространяется на произведение трех и более рациональных дробей. Например:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{m}{n}=\frac{acm}{bdn}.$$

Выясним теперь, как выполняется возведение рациональной дроби в степень.

Рассмотрим выражение $\left(\frac{a}{b}\right)^n$, являющееся n-й степенью рациональной дроби $\frac{a}{b}$ и докажем, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

● По определению степени имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}}.$$

Применяя правило умножения рациональных дробей и определение степени, получим

$$\underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \quad ○$$

Из доказанного тождества следует правило возведения рациональной дроби в степень:

чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Пример 5. Возведем дробь $\frac{2a^2}{b^4}$ в третью степень.

▶ Воспользуемся правилом возведения в степень:

$$\left(\frac{2a^2}{b^4}\right)^3 = \frac{(2a^2)^3}{(b^4)^3} = \frac{8a^6}{b^{12}}. \quad ◁$$

Упражнения

108. Выполните умножение:

а) $\frac{5}{3a} \cdot \frac{2b}{3}$; б) $\frac{5a}{8y} \cdot \frac{7}{10}$; в) $\frac{b^2}{10} \cdot \frac{5}{b}$; г) $\frac{18}{c^4} \cdot \frac{c^3}{24}$.

109. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x}{4y} \cdot \frac{10}{3x^2}$; б) $\frac{2{,}5}{2a^2} \cdot \frac{4a^3}{5b^2}$; в) $\frac{7a^3}{24b} \cdot 8b^2$; г) $14ab \cdot \frac{1}{21b^3}$.

110. Выполните умножение:

а) $\frac{12}{5x} \cdot \frac{x^3}{12a}$; б) $\frac{8c^2}{15m} \cdot \frac{1}{4c^2}$; в) $\frac{11a^4}{6} \cdot \frac{12b}{a^5}$; г) $\frac{4n^2}{3m^2} \cdot \frac{9m}{2}$.

111. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $15x^2 \cdot \frac{7}{6x^3}$; б) $\frac{25}{16y^2} \cdot 2y^2$; в) $6am^2 \cdot \frac{4a}{3m^3}$; г) $\frac{2b}{5a^3} \cdot 10a$

112. Упростите выражение:

а) $\frac{48x^5}{49y^4} \cdot \frac{7y^2}{16x^3}$; в) $\frac{72x^4}{25y^5} \cdot \left(-\frac{2{,}5y^4}{27x^5}\right)$;

б) $\frac{18m^3}{11n^3} \cdot \frac{22n^4}{9m^2}$; г) $-\frac{35ax^2}{12b^2y} \cdot \frac{8ab}{21xy}$.

113. Выполните умножение:

а) $-\frac{10x^2y^2}{9a^2} \cdot \frac{27a^3}{5xy}$; в) $\frac{13x}{12mn^2} \cdot 4m^2n$;

б) $\frac{2m^3}{35a^3b^2} \cdot \left(-\frac{7a^2b}{6m}\right)$; г) $-ab \cdot \left(-\frac{11x^2}{3a^2b^2}\right)$.

114. Упростите выражение:

а) $\frac{2a^2b}{3xy} \cdot \frac{3x^2y}{4ab^2} \cdot \frac{6ax}{15b^2}$; б) $\frac{6m^3n^2}{35p^3} \cdot \frac{49n^4}{m^5p^3} \cdot \frac{5m^4p^2}{42n^6}$.

115. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{x}{2y}\right)^3$; б) $\left(\frac{3a}{c}\right)^4$; в) $\left(\frac{n^2}{10m}\right)^3$; г) $\left(\frac{9a^3}{2b^2}\right)^2$.

116. Возведите в степень:

а) $\left(\frac{2a}{p^2q^3}\right)^4$; б) $\left(\frac{3a^2b^3}{s^4}\right)^2$; в) $\left(-\frac{2a^2b}{3mn^3}\right)^2$; г) $\left(-\frac{3x^2}{2y^3}\right)^3$.

117. Представьте в виде дроби:

а) $\left(\frac{5a^3}{3b^2}\right)^4$; б) $\left(\frac{2x^2}{3y^3}\right)^5$; в) $\left(-\frac{10m^2}{n^2p}\right)^3$; г) $\left(-\frac{b^3c^2}{8a^3}\right)^2$.

118. Зная, что $a - \frac{5}{a} = 2$, найдите значение выражения $a^2 + \frac{25}{a^2}$.

119. Выполните умножение:

а) $\frac{x^2 - xy}{y} \cdot \frac{y^2}{x}$; г) $\frac{4ab}{cx + dx} \cdot \frac{ax + bx}{2ab}$;

б) $\frac{3a}{b^2} \cdot \frac{ab + b^2}{9}$; д) $\frac{ma - mb}{3n^2} \cdot \frac{2m}{nb - na}$;

в) $\frac{m - n}{mn} \cdot \frac{2mn}{mn - m^2}$; е) $\frac{ax - ay}{5x^2y^2} \cdot \left(-\frac{5xy}{by - bx}\right)$.

120. Выполните умножение:

а) $(3a - 15b) \cdot \dfrac{8}{a^2 - 25b^2}$; в) $\dfrac{y}{3y^2 - 12} \cdot (y^2 - 4y + 4)$;

б) $(x^2 - 4) \cdot \dfrac{2x}{(x + 2)^2}$; г) $\dfrac{2ab}{a^2 - 6ab + 9b^2} \cdot (a^2 - 9b^2)$.

121. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{xy}{a^2 + a^3} \cdot \dfrac{a + a^2}{x^2y^2}$; б) $\dfrac{6a}{x^2 - x} \cdot \dfrac{2x - 2}{3ax}$.

122. Упростите выражение:

а) $\dfrac{y^2 - 16}{10xy} \cdot \dfrac{5y}{3y + 12}$; б) $\dfrac{b - a}{a} \cdot \dfrac{3ab}{a^2 - b^2}$.

123. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{a^2 - 1}{a - b} \cdot \dfrac{7a - 7b}{a^2 + a}$; в) $\dfrac{(x + 3)^2}{2x - 4} \cdot \dfrac{x^2 - 4}{3x + 9}$;

б) $\dfrac{b^2 + 2bc}{b + 3} \cdot \dfrac{5b + 15}{b^2 - 4c^2}$; г) $\dfrac{(5 - y)^2}{2y + 12} \cdot \dfrac{y^2 - 36}{2y - 10}$.

124. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{5mn - m}{4m + n} \cdot \dfrac{16m^2 - n^2}{5n - 1}$, если $m = \dfrac{1}{4}$, $n = -3$;

б) $\dfrac{(x + 2)^2}{3x + 9} \cdot \dfrac{2x + 6}{x^2 - 4}$, если $x = 0{,}5$; $-1{,}5$.

125. Выполните умножение:

а) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 3a} \cdot \dfrac{2a - 6}{b^2 + 2ab + a^2}$; б) $\dfrac{bx + 3b}{x^2 - 25} \cdot \dfrac{25 - 10x + x^2}{ax + 3a}$.

126. Представьте в виде дроби:

а) $\dfrac{mx^2 - my^2}{2m + 8} \cdot \dfrac{3m + 12}{my + mx}$; в) $\dfrac{x^3 - y^3}{x + y} \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + xy + y^2}$;

б) $\dfrac{ax + ay}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \dfrac{x^2 - xy}{7x + 7y}$; г) $\dfrac{a^2 - 1}{a^3 + 1} \cdot \dfrac{a^2 - a + 1}{a^2 + 2a + 1}$;

127. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{3x + 12} \cdot \dfrac{x^2 - 16}{2x - 10}$; в) $\dfrac{y^2 - 25}{y^2 + 12y + 36} \cdot \dfrac{3y + 18}{2y + 10}$;

б) $\dfrac{1 - a^2}{4a + 8b} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + 4b^2}{3 - 3a}$; г) $\dfrac{b^3 + 8}{18b^2 + 27b} \cdot \dfrac{2b + 3}{b^2 - 2b + 4}$.

128. Докажите, что если дробь $\frac{a}{b}$ является квадратом дроби, т и произведение ab можно представить в виде квадрата некото рого выражения.

129. Упростите выражение:

$$\frac{a^2 - 4ac + 3bc}{a^2 - ab + bc - ac} + \frac{a + 3b}{b - a} + \frac{a + 2c}{a - c}.$$

130. Первые 30 км велосипедист ехал со скоростью v км/ч, а остальные 17 км — со скоростью, на 2 км/ч большей. Сколько времени t (ч) затратил велосипедист на весь путь? Найдите t, если: а) $v = 15$; б) $v = 18$.

131. Выразите x через a и b:

а) $3x + b = a$;
в) $\frac{x}{a} + 1 = b$;
б) $b - 7x = a - b$;
г) $b - \frac{x}{10} = a$.

6. Деление дробей

При делении обыкновенных дробей первую дробь умножают на дробь, обратную второй. Например:

$$\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}.$$

Так же поступают при делении любых рациональных дробей:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

где a, b, c и d — некоторые многочлены, причем b, c и d — ненулевые многочлены.

Это равенство выражает *правило деления рациональных дробей*:

чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Пример 1. Разделим дробь $\frac{7a^2}{b^3}$ на дробь $\frac{14a}{b}$.

▶ Воспользуемся правилом деления дробей:

$$\frac{7a^2}{b^3} : \frac{14a}{b} = \frac{7a^2}{b^3} \cdot \frac{b}{14a} = \frac{a}{2b^2}. \triangleleft$$

Пример 2. Разделим дробь $\frac{x-2}{x}$ на дробь $\frac{x+1}{x+2}$.

▶ Имеем

$$\frac{x-2}{x} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+2}{x+1} = \frac{x^2-4}{x^2+x}. \triangleleft$$

Пример 3. Разделим дробь $\frac{a^2-9}{3y}$ на многочлен $a+3$.

▶ При делении дроби на многочлен этот многочлен записывают в виде дроби и затем применяют правило деления дробей:

$$\frac{a^2-9}{3y} : (a+3) = \frac{a^2-9}{3y} : \frac{a+3}{1} = \frac{a^2-9}{3y} \cdot \frac{1}{a+3} = \frac{a-3}{3y}. \triangleleft$$

Упражнения

132. Выполните деление:

а) $\frac{5m}{6n} : \frac{15m^2}{8}$; в) $\frac{a^2}{12b} : \frac{ab}{36}$; д) $\frac{11x}{4y^2} : (22x^2)$; ж) $\frac{18c^4}{7d} : (9c^2d)$;

б) $\frac{14}{9x^3} : \frac{7x}{2y^2}$; г) $\frac{3x}{10a^3} : \frac{1}{5a^2}$; е) $27a^3 : \frac{18a^4}{7b^2}$; з) $35x^5y : \frac{7x^3}{34}$.

133. Упростите выражение:

а) $\frac{6x^2}{5y} : \frac{3x}{10y^3}$; в) $\frac{3ab}{4xy} : \left(-\frac{21a^2b}{10x^2y}\right)$;

б) $\frac{8c}{21d^2} : \frac{6c^2}{7d}$; г) $-\frac{18a^2b^2}{5cd} : \left(-\frac{9ab^3}{5c^2d^4}\right)$.

134. Выполните деление:

а) $\frac{6x^2}{m^3n} : \frac{x}{3mn^2}$; в) $\frac{8mx^2}{3y^3} : (4m^2x)$;

б) $\frac{35x^2y}{12ab} : \frac{7xy}{8ab^2}$; г) $15a^2bx : \frac{a^3b^2}{30x^2}$.

135. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{3x^2}{5y^3} : \frac{9x^3}{2y^2} \cdot \frac{5y}{3x}$; б) $\frac{7p^4}{10q^3} \cdot \frac{5q}{14p^2} : \frac{3p}{4q^4}$.

136. Упростите выражение:

а) $\frac{11m^4}{6n^2} \cdot \frac{5m}{6n^3} : \frac{11n^3}{12m^3}$; б) $\frac{8x^3}{7y^3} : \frac{4x^4}{49y^2} : \frac{7x}{y^2}$.

137. Выполните деление:

а) $\frac{m^2 - 3m}{8x^2} : \frac{3m}{8x}$; д) $\frac{a^2 - 3ab}{3b} : (7a - 21b)$;

б) $\frac{5a^2}{6b^3} : \frac{a^3}{ab - b^2}$; е) $(x^2 - 4y^2) : \frac{5x - 10y}{x}$;

в) $\frac{x^2 + x^3}{11a^2} : \frac{4 + 4x}{a^3}$; ж) $(2a - b)^2 : \frac{4a^3 - ab^2}{3}$;

г) $\frac{6ax}{m^2 - 2m} : \frac{8ax}{3m - 6}$; з) $(10m - 15n) : \frac{(2m - 3n)^2}{2m}$.

138. Представьте выражение в виде дроби и сократите ее:

а) $(x + 3y) : (x^2 - 9y^2)$;

б) $(a^2 - 6ab + 9b^2) : (a^2 - 9b^2)$;

в) $(x^2 - 49y^2) : (49y^2 + 14xy + x^2)$;

г) $(m - 4n)^2 : (32n^2 - 2m^2)$.

139. Выполните действие:

а) $\frac{x^2 - xy}{9y^2} : \frac{2x}{3y}$; в) $(m^2 - 16n^2) : \frac{3m + 12n}{mn}$;

б) $\frac{2a^3 - a^2b}{36b^2} : \frac{2a - b}{9b^3}$; г) $\frac{9p^2 - 1}{pq - 2q} : \frac{1 - 3p}{3p - 6}$.

140. Найдите значение выражения:

а) $\frac{4x^2 - 4x}{x + 3} : (2x - 2)$, если $x = 2{,}5$; -1;

б) $(3a + 6b) : \frac{2a^2 - 8b^2}{a + b}$, если $a = 26$, $b = -12$.

141. Выполните деление:

а) $\frac{3x + 6y}{x^2 - y^2} : \frac{5x + 10y}{x^2 - 2xy + y^2}$; б) $\frac{a^2 + 4a + 4}{16 - b^4} : \frac{4 - a^2}{4 + b^2}$.

142. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2 + ax + x^2}{x - 1} : \dfrac{a^3 - x^3}{x^2 - 1}$; б) $\dfrac{ap^2 - 9a}{p^3 - 8} : \dfrac{p + 3}{2p - 4}$.

143. Из формулы $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ выразите:

а) переменную c через переменные a и b;
б) переменную b через переменные a и c.

П

144. Выполните действия:

а) $\dfrac{2b}{2b + 3} - \dfrac{5}{3 - 2b} - \dfrac{4b^2 + 9}{4b^2 - 9}$;

б) $\dfrac{c + 6b}{ac + 2bc - 6ab - 3a^2} + \dfrac{2b}{a^2 + 2ab} - \dfrac{b}{ac - 3a^2}$.

145. От пристани против течения реки отправилась моторная лодка, собственная скорость которой 10 км/ч. Через 45 мин после выхода лодки у нее испортился мотор, и лодку течением реки через 3 ч принесло обратно к пристани. Какова скорость течения реки?

146. Из формулы $y = \dfrac{ab}{2c}$ выразите:

а) переменную c через a, b и y;
б) переменную a через b, c и y.

147. В каких координатных четвертях расположен график функции $y = kx$, если $k > 0$? если $k < 0$?

7. Преобразование рациональных выражений

Рациональное выражение $\left(\dfrac{x - y}{x + y} + \dfrac{2y}{x - y}\right) : (x^2 - 3y^2)$ представляет собой частное от деления суммы рациональных дробей на многочлен. Деление на $x^2 - 3y^2$ можно заменить умножением на дробь $\dfrac{1}{x^2 - 3y^2}$. Поэтому преобразование данного выражения сводится к сложению дробей $\dfrac{x - y}{x + y}$, $\dfrac{2y}{x - y}$ и умножению результата на дробь $\dfrac{1}{x^2 - 3y^2}$. Вообще преобразование любого рационального выражения можно свести к сложению, вычитанию, умножению или лению рациональных дробей.

Из правил действий с дробями следует, что сумму, разнос произведение и частное рациональных дробей всегда можно предс вить в виде рациональной дроби. Значит, и всякое рациональное ражение можно представить в виде рациональной дроби.

Пример 1. Преобразуем в рациональную дробь выражение

$$x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}.$$

▶ Сначала выполним умножение дробей, затем полученный р зультат вычтем из многочлена $x+1$:

1) $\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=\frac{x-2}{x}$;

2) $x+1-\frac{x-2}{x}=\frac{x(x+1)-(x-2)}{x}=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$. ◁

Запись можно вести иначе:

$$x+1-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x}=x+1-\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)x}=x+1-\frac{x-2}{x}=$$
$$=\frac{x^2+x-x+2}{x}=\frac{x^2+2}{x}.$$

Пример 2. Представим выражение

$$\left(\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}\right)\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}+1$$

в виде рациональной дроби.

▶ Сначала сложим дроби, заключенные в скобки, затем найденный результат умножим на дробь $\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}$ и, наконец, к полученному произведению прибавим 1:

1) $\frac{b}{a^2-ab}+\frac{a}{ab-b^2}=\frac{b}{a(a-b)}+\frac{a}{b(a-b)}=\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}$;

2) $\frac{b^2+a^2}{ab(a-b)}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{a^2+b^2}=\frac{(a^2+b^2)\cdot ab(a+b)}{ab(a-b)\cdot(a^2+b^2)}=\frac{a+b}{a-b}$;

3) $\frac{a+b}{a-b}+1=\frac{a+b+a-b}{a-b}=\frac{2a}{a-b}$. ◁

Пример 3. Представим выражение $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}$ в виде рациональной дроби.

▶ Преобразование можно вести по-разному. Можно представить в виде рациональных дробей отдельно числитель и знаменатель, а затем разделить первый результат на второй. А можно умножить числитель и знаменатель на xy, воспользовавшись основным свойством дроби:

$$\frac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2}=\frac{\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)xy}{\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)xy}=\frac{\dfrac{x}{y}\cdot xy-\dfrac{y}{x}\cdot xy}{\dfrac{x}{y}\cdot xy+\dfrac{y}{x}\cdot xy-2xy}=$$

$$=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2-2xy}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x+y}{x-y}.\ \triangleleft$$

Пример 4. Пешеход отправился из поселка A на станцию B со скоростью v_1 км/ч. Придя на станцию, он обнаружил, что оставил дома необходимые документы, и возвратился обратно в поселок со скоростью v_2 км/ч. Взяв документы, он снова пошел на станцию со скоростью v_3 км/ч. Выясните, какой была средняя скорость пешехода на всем пройденном им пути.

▶ Пусть расстояние AB равно s км. Тогда на путь от A до B пешеход затратил сначала $\dfrac{s}{v_1}$ ч, на путь от B до A — $\dfrac{s}{v_2}$ ч, а на повторное прохождение пути от A до B — $\dfrac{s}{v_3}$ ч. На весь путь пешеход затратил $\dfrac{s}{v_1}+\dfrac{s}{v_2}+\dfrac{s}{v_3}$ ч. За это время он прошел $3s$ км. Теперь можно найти среднюю скорость $v_{ср}$ пешехода на всем пройденном им пути:

$$v_{ср}=\frac{3s}{\dfrac{s}{v_1}+\dfrac{s}{v_2}+\dfrac{s}{v_3}}.$$

Сократив данную дробь на s, найдем, что

$$v_{ср}=\frac{3}{\dfrac{1}{v_1}+\dfrac{1}{v_2}+\dfrac{1}{v_3}}.\ \triangleleft$$

Мы получили формулу для вычисления средней скорости, есл известны скорости v_1, v_2, v_3 на каждом из трех участков одинаково длины.

Из полученного равенства видно, что средняя скорость дви жения пешехода не равна среднему арифметическому скоростей v v_2 и v_3. Она вычисляется по более сложной формуле, которую назы вают формулой *среднего гармонического* трех чисел.

Аналогично средняя скорость движения на двух участках пут одинаковой длины вычисляется по формуле среднего гармоническо го двух чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}},$$

где v_1 и v_2 — скорости на этих участках.

Средняя скорость движения на четырех участках пути одинако вой длины вычисляется по формуле среднего гармонического четы рех чисел:

$$v_{\text{ср}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}},$$

где v_1, v_2, v_3, v_4 — скорости на этих участках.

Вообще если мы имеем некоторый ряд положительных чисел a_1, a_2, ... , a_n, то среднее гармоническое этого ряда вычисляется по формуле

$$a_{\text{ср}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Эту формулу иногда записывают в другом виде:

$$\frac{1}{a_{\text{ср}}} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}.$$

Из этой записи видно, что величина, обратная среднему гармоническому нескольких положительных чисел, равна среднему арифметическому чисел, им обратных.

Упражнения

148. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$;

б) $\left(\dfrac{a}{m^2}+\dfrac{a^2}{m^3}\right):\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{m}{a}\right)$;

в) $\dfrac{ab+b^2}{3}:\dfrac{b^3}{3a}+\dfrac{a+b}{b}$;

г) $\dfrac{x-y}{x}-\dfrac{5y}{x^2}\cdot\dfrac{x^2-xy}{5y}$.

149. Выполните действия:

а) $\left(\dfrac{x}{x+1}+1\right)\cdot\dfrac{1+x}{2x-1}$;

б) $\dfrac{5y^2}{1-y^2}:\left(1-\dfrac{1}{1-y}\right)$;

в) $\left(\dfrac{4a}{2-a}-a\right):\dfrac{a+2}{a-2}$;

г) $\dfrac{x-2}{x-3}\cdot\left(x+\dfrac{x}{2-x}\right)$.

150. Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{2m+1}{2m-1}-\dfrac{2m-1}{2m+1}\right):\dfrac{4m}{10m-5}$;

б) $\dfrac{x+3}{x^2+9}\cdot\left(\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}\right)$.

151. Выполните действия:

а) $\dfrac{a^2-9}{2a^2+1}\cdot\left(\dfrac{6a+1}{a-3}+\dfrac{6a-1}{a+3}\right)$;

б) $\left(\dfrac{5x+y}{x-5y}+\dfrac{5x-y}{x+5y}\right):\dfrac{x^2+y^2}{x^2-25y^2}$.

152. Выполните действия:

а) $\dfrac{a^2-25}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a^2+5a}-\dfrac{a+5}{a^2-3a}$;

б) $\dfrac{1-2x}{2x+1}+\dfrac{x^2+3x}{4x^2-1}:\dfrac{3+x}{4x+2}$;

в) $\dfrac{b-c}{a+b}-\dfrac{ab-b^2}{a^2-ac}\cdot\dfrac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$;

г) $\dfrac{a^2-4}{x^2-9}:\dfrac{a^2-2a}{xy+3y}+\dfrac{2-y}{x-3}$.

153. Упростите выражение:

а) $(a^2+2a+1)\cdot\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a^2-1}-\dfrac{1}{a-1}\right)$;

б) $\left(1-\dfrac{9x^2+4}{12x}\right):\left(\dfrac{1}{3x}-\dfrac{1}{2}\right)+1$;

в) $1-\left(\dfrac{2}{a-2}-\dfrac{2}{a+2}\right)\cdot\left(a-\dfrac{3a+2}{4}\right)$;

г) $(y^2-4)\left(\dfrac{3}{y+2}-\dfrac{2}{y-2}\right)+5$.

154. Выполните действия:

а) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x-y}\right)\left(x-\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$;

б) $\left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{b}{a}\right)$;

в) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1\right)$;

г) $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right)$.

155. Упростите выражение:

а) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

б) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$.

156. Представьте в виде дроби:

а) $\frac{x+2}{x^2-2x+1}\cdot\frac{3x-3}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}$;

б) $\frac{a-2}{4a^2+16a+16}:\left(\frac{a}{2a-4}-\frac{a^2+4}{2a^2-8}-\frac{2}{a^2+2a}\right)$.

$\boxed{157.}$ При каком значении a выражение

$$(0{,}5\,(a-1)^2-18)\left(\frac{a+5}{a-7}+\frac{a-7}{a+5}\right)$$

принимает наименьшее значение? Найдите это значение.

$\boxed{158.}$ При каком значении b выражение $\frac{81}{(0{,}5b+9)^2+(0{,}5b-9)^2}$ принимает наибольшее значение? Найдите это значение.

159. Докажите тождество:

а) $\frac{2p-q}{pq}-\frac{1}{p+q}\cdot\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{q}$;

б) $\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}=\frac{b}{a-b}-\frac{b^2-ab}{a^2-b^2}$.

$\boxed{160.}$ Докажите тождество:

а) $\frac{1{,}2x^2-xy}{0{,}36x^2-0{,}25y^2}=\frac{20x}{6x+5y}$; б) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x^2}=\frac{50}{9a-8x}$.

161. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения не зависит от значений входящих в него переменных:

а) $\left(\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{a-b}{2a+2b}\right)\cdot\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{b}{b-a}$;

б) $\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{(x-y)^2}-\dfrac{y}{x^2-y^2}\right)$.

162. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)$$

является натуральным числом.

163. Представьте в виде многочлена или рациональной дроби:

а) $\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2$;

б) $\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)^2$; г) $\left(\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}\right)^2-\left(\dfrac{p}{q}-\dfrac{q}{p}\right)^2$.

164. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$; б) $\dfrac{\dfrac{2a-b}{b}+1}{\dfrac{2a+b}{b}-1}$; в) $\dfrac{\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}}{\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}}$; г) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}}$.

165. Представьте в виде отношения многочленов дробь:

а) $\dfrac{2-\dfrac{a}{x}}{2+\dfrac{a}{x}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-b}{c}+3}{\dfrac{a+b}{c}-1}$; в) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$; г) $\dfrac{x-y}{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}$.

166. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, если $x=\dfrac{ab}{a+b}$; б) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-x}{\dfrac{b}{a}+x}$, если $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

167. Выполните подстановку и упростите полученное выражение:

а) $\dfrac{a+b}{a-b}$, если $a=\dfrac{1}{1-x}$, $b=\dfrac{1}{1+x}$;

б) $\dfrac{ax}{a+x}-\dfrac{bx}{b-x}$, если $x=\dfrac{ab}{a-b}$.

168. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{a^2}{4} - \dfrac{b^2}{9}}{\dfrac{a}{12} + \dfrac{b}{18}}$ при $a = \dfrac{2}{3}$, $b = -\dfrac{1}{2}$; б) $\dfrac{0{,}2a - b}{\dfrac{a^2}{25} - b^2}$ при $a = -8$, $b =$

169. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{1}{3 - \dfrac{1}{x - 2}}$; б) $\dfrac{6x}{2 + \dfrac{1}{x + 8}}$?

170. Найдите среднее гармоническое чисел:

а) 3, 5; б) 2, 4, 8; в) 5, 10, 15, 20.

171. Из пункта A в пункт B автобус ехал со скоростью 90 км/ч. В обратном пути из-за ненастной погоды он снизил скорость 60 км/ч. Какова средняя скорость автобуса на всем пути след вания?

172. Мастер может выполнить заказ на изготовление деталей за 4 а его ученик — за 6 ч. За какое время они смогут выполни два заказа, работая совместно?

173. Готовясь к соревнованиям, школьник трижды прошел на лы жах одну и ту же дистанцию: сначала со скоростью 9 км/ч, за тем со скоростью 12 км/ч и, наконец, со скоростью 10 км/ч Какова была средняя скорость лыжника на всем пути?

174. Найдите координаты точек пересечения с осью x и осью y гра фика функции: а) $y = \frac{1}{2}x - 2$; б) $y = -0{,}4x + 2$. Постройте гра фик этой функции.

175. Напишите уравнение прямой: а) проходящей через точку (0; 4) и параллельной прямой $y = 3x$; б) проходящей через начало координат и параллельной прямой $y = -\frac{1}{2}x - 8$.

176. Изобразите схематически график функции, заданной формулой вида $y = kx + b$, если:

а) $k > 0$, $b > 0$; в) $k < 0$, $b < 0$;
б) $k < 0$, $b > 0$; г) $k = 0$, $b > 0$.

177. Одна сторона прямоугольника на 20 см больше другой. Если меньшую сторону увеличить вдвое, а бо́льшую — втрое, то периметр нового прямоугольника окажется равным 240 см. Найдите стороны данного прямоугольника.

178. Скорый и пассажирский поезда идут навстречу друг другу с двух станций, расстояние между которыми 710 км. Скорый поезд вышел на час раньше пассажирского и идет со скоростью 110 км/ч. Через сколько часов он встретится с пассажирским поездом, если скорость пассажирского поезда равна 90 км/ч?

8. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

Пусть площадь прямоугольника, длина которого x см, а ширина y см, равна 24 см^2. Тогда зависимость y от x выражается формулой $y = \frac{24}{x}$.

В этой задаче переменные x и y принимали лишь положительные значения. В дальнейшем мы будем рассматривать функции, задаваемые формулой вида $y = \frac{k}{x}$, в которой переменные x и y могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, причем $k \neq 0$. Такие функции называют *обратными пропорциональностями*.

Определение. Обратной пропорциональностью называется функция, которую можно задавать формулой вида $y = \frac{k}{x}$, где x — независимая переменная и k — не равное нулю число.

Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, отличных от нуля. Это следует из того, что выражение $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех $x \neq 0$.

Рассмотрим свойство обратной пропорциональности. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента ($x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$), а y_1 и y_2 — соответствующие им значения функции. Так как $k \neq 0$, то $y_1 \neq 0$ и $y_2 \neq 0$. Из формулы $y = \frac{k}{x}$ следует, что $x_1y_1 = k$ и $x_2y_2 = k$ и потому верна пропорция $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, т. е. *отношение двух произвольных значений аргумента равно обратному отношению соответствующих значений функции*. С этим связано название функции — обратная пропорциональность.

В повседневной жизни мы часто встречаемся со случаями, когда зависимость между переменными является обратной пропорциональностью.

Приведем примеры.

Пример 1. Время t (ч), которое автомобиль, двигаясь со скоростью v км/ч, затрачивает на путь, равный 450 км, вычисляется по формуле $t = \frac{450}{v}$, т. е. зависимость t от v является обратной пропорциональностью.

Пример 2. Масса m (кг) муки, которую можно купить на 85 р. по цене p р. за килограмм, вычисляется по формуле $m = \frac{85}{p}$, т. е. зависимость m от p является обратной пропорциональностью.

Построим график функции $y = \frac{12}{x}$. Для этого найдем значения y, соответствующие некоторым положительным значениям и противоположным им отрицательным значениям x:

x	1	1,5	2	3	4	5	6	8	12
y	12	8	6	4	3	2,4	2	1,5	1

x	−1	−1,5	−2	−3	−4	−5	−6	−8	−12
y	−12	−8	−6	−4	−3	−2,4	−2	−1,5	−1

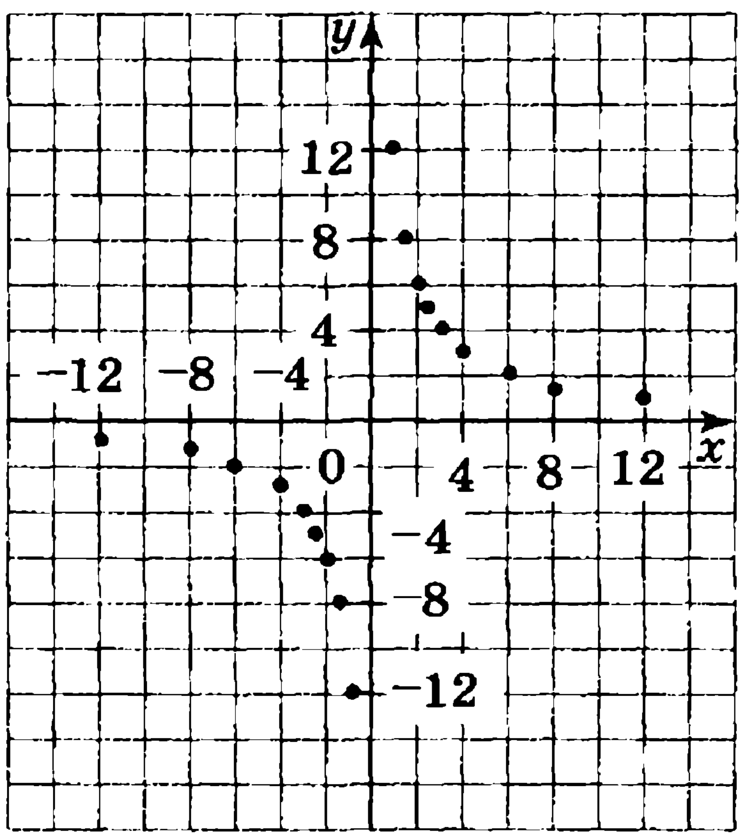


Рис. 3

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице (рис. 3).

Выясним некоторые особенности графика функции $y = \frac{12}{x}$. Так как число нуль не входит в область определения функции, то на графике нет точки с абсциссой 0, т. е. график не пересекает ось y. Так как ни при каком x значение y не равно нулю, то график не пересекает ось x. Положительным значениям x соответствуют положительные значения y. Чем больше положительное значение x, тем меньше соответствующее значение y. Например, если $x = 10$, то $y = 1{,}2$; если $x = 100$, то $y = 0{,}12$; если $x = 1000$, то

$y = 0{,}012$. Значит, чем больше положительная абсцисса точки графика, тем ближе эта точка к оси абсцисс. Для достаточно больших значений x это расстояние может стать как угодно малым. Чем ближе положительная абсцисса точки графика к нулю, тем больше ордината этой точки. Например, если $x = 0{,}03$, то $y = 400$; если $x = 0{,}0001$, то $y = 120\,000$.

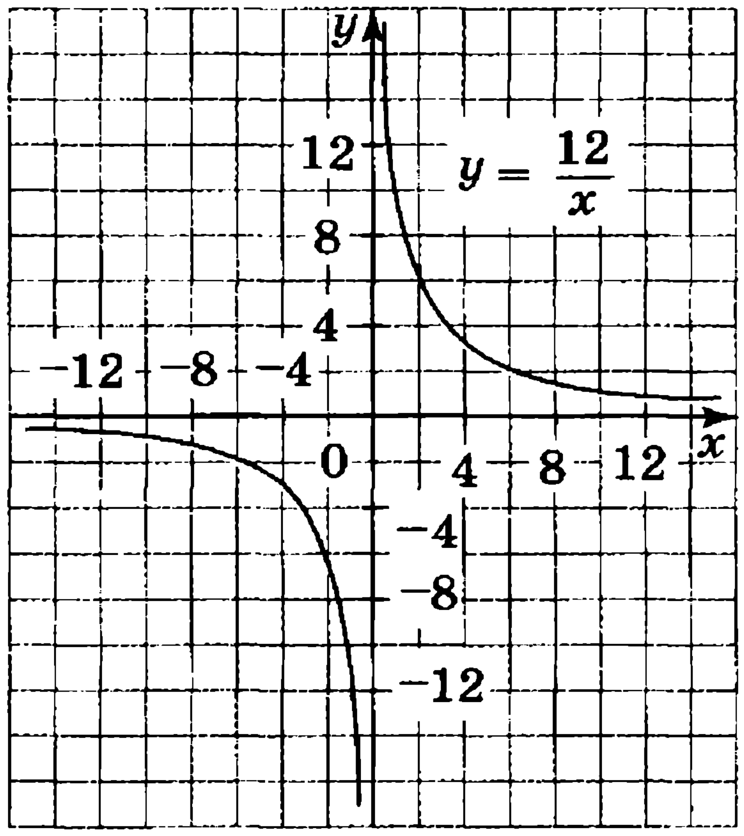


Рис. 4

График функции $y = \frac{12}{x}$ показан на рисунке 4. Он состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Одна из этих ветвей расположена в первой координатной четверти, а другая — в третьей. Такой же вид имеет график функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k > 0$.

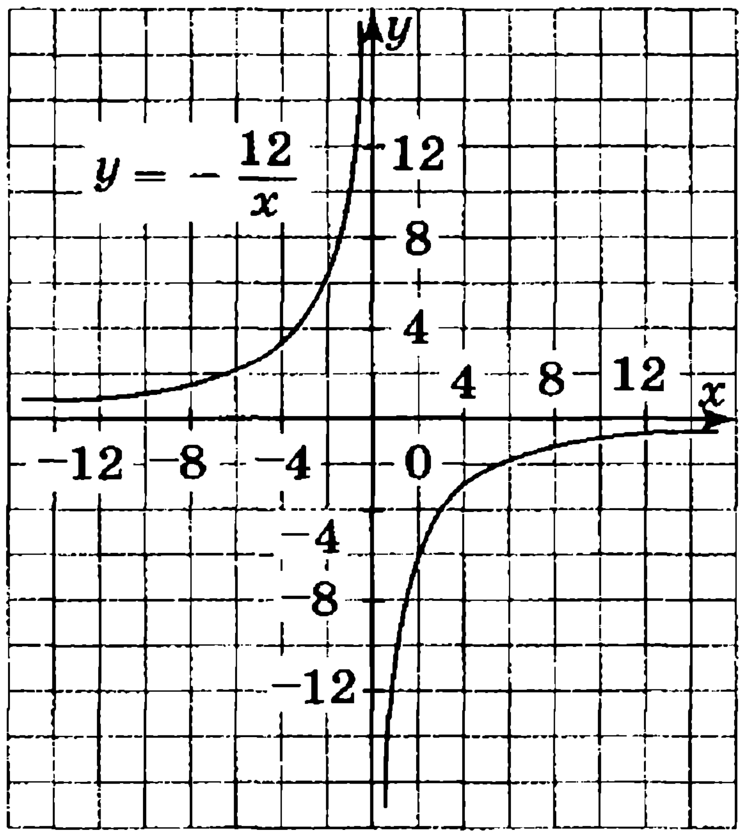


Рис. 5

На рисунке 5 построен график функции $y = -\frac{12}{x}$. Он так же, как и график функции $y = \frac{12}{x}$, представляет собой кривую, состоящую из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Однако в отличие от графика функции $y = \frac{12}{x}$ одна из них лежит во второй, а другая — в четвертой координатной четверти.

График функции $y = \frac{k}{x}$ при любом $k < 0$ имеет такой же вид, что и график функции $y = -\frac{12}{x}$.

Кривую, являющуюся графиком обратной пропорциональности, называют *гиперболой*. Гипербола состоит из двух ветвей.

Упражнения

179. Функция задана формулой $y = \frac{8}{x}$. Заполните таблицу.

x	−4		−0,25	2	5	16	
y		−4					0,4

180. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{120}{x}$. Заполните таблицу.

x	–1200	–600			75	120		1000
y			–0,5	–1			0,4	

181. Двигаясь со скоростью v км/ч, поезд проходит расстояние между городами A и B, равное 600 км, за t ч. Запишите формулу, выражающую зависимость: а) v от t; б) t от v.

182. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{10}{x}$. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 100; 1000; 0,1; 0,02. Определите, принадлежит ли графику этой функции точка $A(-0{,}05; -200)$, $B(-0{,}1; 100)$, $C(400; 0{,}025)$, $D(500; -0{,}02)$.

183. Известно, что некоторая функция — обратная пропорциональность. Задайте ее формулой, зная, что значению аргумента, равному 2, соответствует значение функции, равное 12.

184. На рисунке 6 построен график функции, заданной формулой $y = \frac{8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 2; 4; –1; –4; –5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное –4; –2; 8.

185. Постройте график функции, заданной формулой $y = \frac{-8}{x}$. Найдите по графику:

а) значение y, соответствующее значению x, равному 4; 2,5; 1,5; –1; –2,5;

б) значение x, которому соответствует значение y, равное 8; –2.

186. Постройте график функции $y = \frac{6}{x}$ и, используя его, решите уравнение:

а) $\frac{6}{x} = x$; б) $\frac{6}{x} = -x + 6$.

187. Решите графически уравнение:

а) $\frac{8}{x} = x^2$; б) $\frac{8}{x} = x^3$.

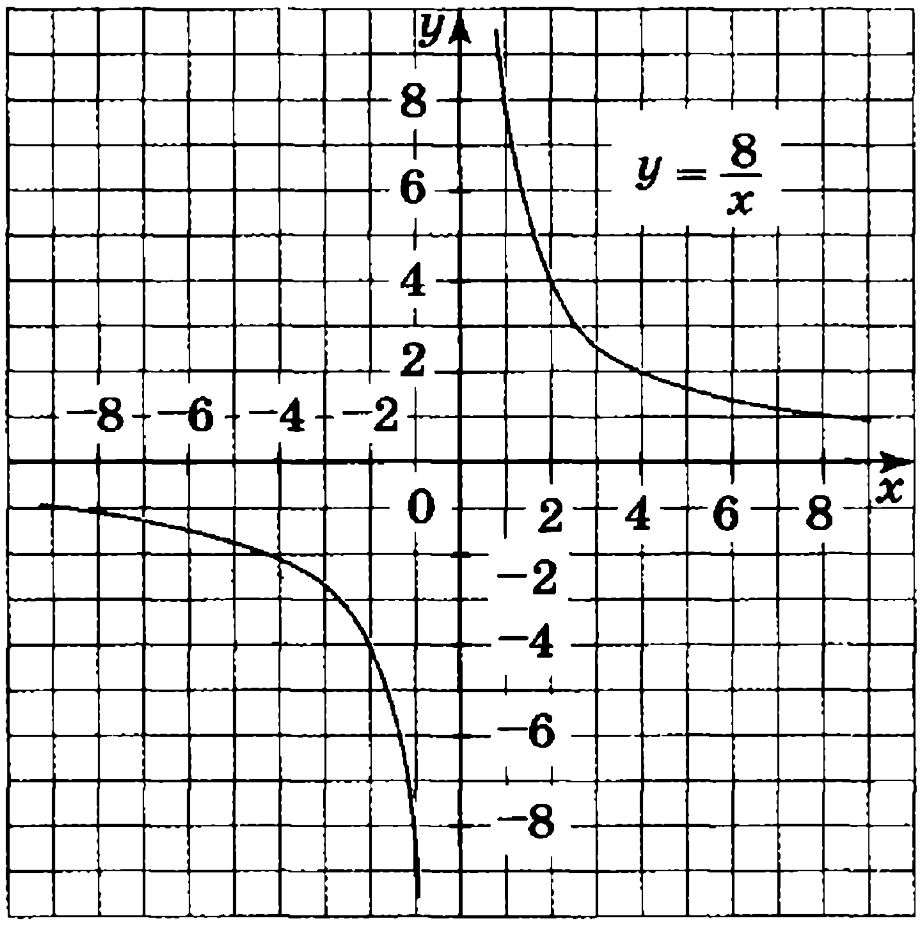


Рис. 6

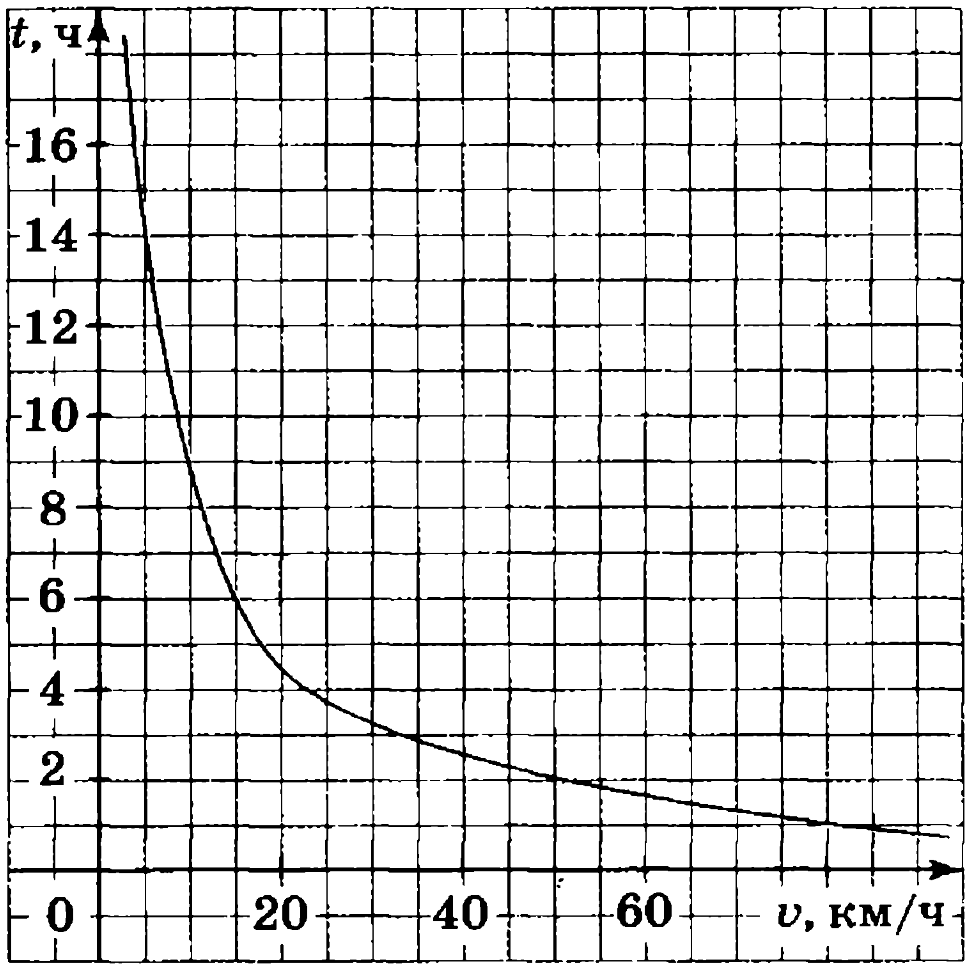


Рис. 7

188. Используя графические представления, выясните, сколько решений имеет уравнение:

а) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k > 0$; в) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k > 0$;

б) $\frac{k}{x} = x^2$, где $k < 0$; г) $\frac{k}{x} = x^3$, где $k < 0$.

189. Прямоугольный параллелепипед со сторонами основания a см и b см и высотой 20 см имеет объем, равный 120 см^3. Выразите формулой зависимость b от a. Является ли эта зависимость обратной пропорциональностью? Какова область определения этой функции? Постройте график.

190. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку:

а) $A(8;\ 0{,}125)$; б) $B\left(\frac{2}{3};\ 1\frac{4}{5}\right)$; в) $C(-25;\ -0{,}2)$.

191. На рисунке 7 построен график зависимости времени, затрачиваемого на путь из пункта A в пункт B, от скорости движения. С помощью графика ответьте на вопросы:

а) Сколько времени потребуется на путь из A в B при скорости движения 80 км/ч? 25 км/ч? 40 км/ч?

б) С какой скоростью надо двигаться, чтобы добраться из пункта A в пункт B за 1 ч? за 4 ч? за 8 ч? за 16 ч?

в) Каково расстояние между пунктами A и B?

192. Определите знак числа k, зная, что график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен:

а) в первой и третьей координатных четвертях;

б) во второй и четвертой координатных четвертях.

193. На рисунке 8 построен график одной из следующих функций:

1. $y = -\frac{5}{x}$ 3. $y = \frac{3}{x}$

2. $y = -\frac{3}{x}$ 4. $y = \frac{5}{x}$

Укажите эту функцию.

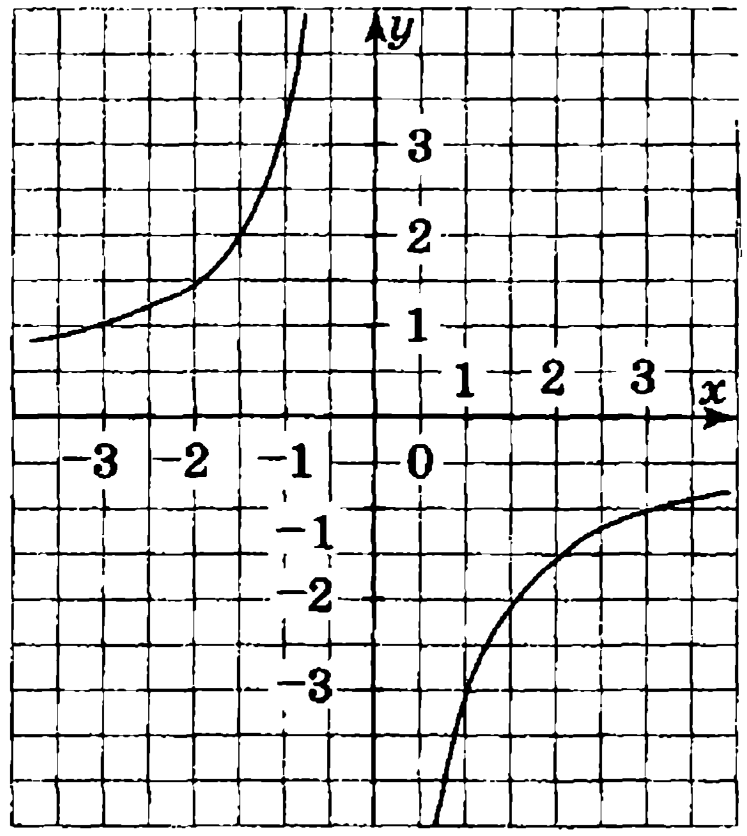


Рис. 8

П

194. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение дроби не зависит от значений этих переменных:

а) $\frac{5(x-y)^2}{(3y-3x)^2}$; б) $\frac{(3x-6y)^2}{4(2y-x)^2}$.

195. Упростите выражение

$$\left(\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x-2} - \frac{12}{4-x^2}\right) : \frac{x+7}{x-2}.$$

196. Из формулы $\frac{1}{x} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ выразите:

а) x через y и z; б) z через x и y.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте правило умножения дробей.

2 Сформулируйте правило возведения дроби в степень.

3 Сформулируйте правило деления дробей.

4 Какая функция называется обратной пропорциональностью?

5 В каких координатных четвертях расположен график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$? при $k < 0$?

9. Представление дроби в виде суммы дробей

Сумму двух рациональных дробей, как известно, всегда можно представить в виде несократимой дроби, у которой числитель и знаменатель — многочлены с переменными или числа (в частности, число 1). Обратная задача — представление дроби в виде суммы двух дробей — неопределенная.

Так, например, дробь $\frac{4x^2 - 16x + 1}{4x^2}$ можно представить в виде суммы (или разности) двух слагаемых разными способами:

$$\frac{4x^2 - 16x + 1}{4x^2} = \frac{4x^2 - 16x}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{4x(x-4)}{4x^2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{x-4}{x} + \frac{1}{4x^2};$$

$$\frac{4x^2 - 16x + 1}{4x^2} = \frac{4x^2}{4x^2} + \frac{1 - 16x}{4x^2} = 1 + \frac{1 - 16x}{4x^2};$$

$$\frac{4x^2 - 16x + 1}{4x^2} = \frac{4x^2 + 1}{4x^2} - \frac{16x}{4x^2} = \frac{4x^2 + 1}{4x^2} - \frac{4}{x}.$$

Вообще задача представления дроби в виде суммы дробей допускает сколь угодно много решений. Действительно, если требуется представить дробь $\frac{a}{b}$ в виде суммы двух дробей, то в качестве одного из слагаемых можно взять произвольную дробь $\frac{c}{d}$. Тогда вторая дробь будет равна разности $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, т. е. равна дроби $\frac{ad - bc}{bd}$.

Для представления дроби в виде суммы дробей можно воспользоваться *методом неопределенных коэффициентов*. Разъясним на примере, в чем состоит этот метод.

Пример 1. Представим дробь $\frac{7x}{(x-3)(x+4)}$ в виде суммы дробей со знаменателями $x - 3$ и $x + 4$.

▶ Допустим, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+4}.$$

Сложим дроби в правой части равенства:

$$\frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+4} = \frac{a(x+4) + b(x-3)}{(x-3)(x+4)} = \frac{(a+b)x + (4a - 3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Получаем, что

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)} = \frac{(a+b)x + (4a-3b)}{(x-3)(x+4)}.$$

Это равенство будет тождеством, если $a + b = 7$ и $4a - 3b = 0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 7, \\ 4a - 3b = 0, \end{cases}$$

найдем, что $a = 3$, $b = 4$.
Следовательно,

$$\frac{7x}{(x-3)(x+4)} = \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x+4}. \ \triangleleft$$

Приведем теперь примеры задач, при решении которых используется представление дроби в виде суммы целого выражения и дроби.

Пример 2. Найдем все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению $x - xy + 3y = 5$.

▶ Выразим из уравнения переменную x через y:

$$x - xy = 5 - 3y,\ x(1-y) = 5 - 3y,\ x = \frac{5-3y}{1-y},\ x = \frac{3y-5}{y-1}.$$

Выделив из дроби $\frac{3y-5}{y-1}$ целую часть, получим

$$x = \frac{3y-3-2}{y-1} = 3 - \frac{2}{y-1}.$$

Значение дроби $\frac{2}{y-1}$ является целым числом, тогда и только тогда, когда $y - 1 = -2$, $y - 1 = -1$, $y - 1 = 1$, $y - 1 = 2$. Отсюда $y = -1$; 0; 2; 3. Вычисляя соответствующее значение x, получаем искомые пары целых чисел: (4; –1), (5; 0), (1; 2), (2; 3). $\triangleleft$

Пример 3. Найдем, при каких значениях n значение дроби $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ является целым числом.

▶ Представим дробь $\frac{n^2-2n-10}{n-5}$ в виде суммы многочлена и дроби.

Для этого многочлен $n^2 - 2n - 10$ разделим на двучлен $n - 5$. Деление выполним уголком аналогично тому, как выполняется деление натуральных чисел.

$$\begin{array}{r|l} n^2 - 2n - 10 & n - 5 \\ \underline{n^2 - 5n} & n + 3 \\ 3n - 10 & \\ \underline{3n - 15} & \\ 5 & \end{array}$$

В результате получаем, что частное равно $n + 3$, а остаток равен 5.
Значит,

$$n^2 - 2n - 10 = (n - 5)(n + 3) + 5.$$

Отсюда

$$\frac{n^2 - 2n - 10}{n - 5} = n + 3 + \frac{5}{n - 5}.$$

Значение двучлена $n + 3$ при любом целом n является целым числом.
Значение дроби $\frac{5}{n - 5}$ является целым числом тогда и только тогда, когда $n - 5$ равно 1, –1, 5 или –5.
Значит, дробь $\frac{n^2 - 2n - 10}{n - 5}$ принимает целые значения при n, равном 0, 4, 6 и 10. ◁

Упражнения

197. При каких значениях a и b равенство

$$\frac{6x}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x - 2}$$

является тождеством?

198. Представьте дробь $\frac{5x - 1}{(x + 4)(x - 2)}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x + 4$ и $x - 2$.

199. Представьте дробь $\frac{4x + 3}{x^2 - 1}$ в виде суммы двух дробей со знаменателями $x - 1$ и $x + 1$.

200. Выясните, при каких целых a дробь $\frac{a^2 - 4a + 1}{a - 2}$ принимает целые значения, и найдите эти значения.

201. Зная, что m — целое число, найдите целые значения дроби:
а) $\frac{m^2 - 6m + 10}{m - 3}$; б) $\frac{(m - 4)^2}{m - 2}$.

202. Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющие уравнению:
а) $5x + y - xy = 2$; б) $xy - x + y = 8$.

203. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x^2 - 6x + 1}{x - 3}$ с целочисленными координатами.

204. Докажите, что при любом целом a, отличном от нуля, значение дроби $\frac{5a^2 + 6}{a^2 + 1}$ не является целым числом.

205. Найдите все пары натуральных чисел a и b, если известно, что сумма обратных им чисел равна $\frac{1}{7}$.

206. Найдите значение дроби $\frac{3x^2 - xy + 6y^2}{y^2}$, если $\frac{x - y}{y} = 2$.

207. Зная, что $\frac{a + 2b}{a} = 11$, найдите значение дроби $\frac{(a - 3b)^2}{b^2}$.

Дополнительные упражнения к главе I

К параграфу 1

208. Найдите значение дроби:
а) $\frac{51 + 17^2}{10}$; б) $\frac{37^2 + 111}{40}$.

209. Расстояние между городами A и B равно 600 км. Первый поезд вышел из A в B и шел со скоростью 60 км/ч. Второй поезд вышел из B в A на 3 ч позже, чем первый из A, и шел со скоростью v км/ч. Поезда встретились через t ч после выхода первого поезда. Выразите v через t. Найдите скорость v при $t = 7$; при $t = 6$.

210. Найдите допустимые значения переменной в выражении:
а) $\frac{3x - 8}{25}$; в) $\frac{9}{x^2 - 7x}$; д) $\frac{12}{|x| - 3}$;
б) $\frac{37}{2y + 7}$; г) $\frac{2y + 5}{y^2 + 8}$; е) $\frac{45}{|y| + 2}$.

211. Составьте какую-либо дробь с переменной x, которая имеет смысл при всех значениях переменной, кроме:

а) $x = 2$;
б) $x = 0$ и $x = 3$;
в) $x = -3$ и $x = 3$;
г) $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{2}$.

212. Укажите область определения функции:

а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{3x}{x+5}$; в) $y = \frac{7x+1}{2x-6}$.

213. Сократите дробь:

а) $\frac{\overline{a00a}}{91}$; б) $\frac{\overline{a0a0}}{101}$.

214. Сократите дробь:

а) $\frac{(3a-3c)^2}{9a^2-9c^2}$;
б) $\frac{(a^2-9)^2}{(3-a)^3}$;
в) $\frac{8y^3-1}{y-4y^3}$;
г) $\frac{5a^2-3ab}{a^2-0{,}36b^2}$.

215. Сократите дробь:

а) $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab-2a-2b}$;
б) $\frac{6x^2-3xy+4x-2y}{9x^2+12x+4}$;
в) $\frac{a^2+4ab+4b^2}{a^3+8b^3}$;
г) $\frac{27x^3-y^3}{18x^2+6xy+2y^2}$.

216. Выполните сокращение:

а) $\frac{b^{14}-b^7+1}{b^{21}+1}$;
б) $\frac{x^{33}-1}{x^{33}+x^{22}+x^{11}}$;
в) $\frac{x(y-z)-y(x-z)}{x(y-z)^2-y(x-z)^2}$;
г) $\frac{a(b+1)^2-b(a+1)^2}{a(b+1)-b(a+1)}$.

217. Докажите, что если в дроби $\frac{x^2-2y^2}{3y^2+5xy}$ переменные x и y заменить соответственно на kx и ky, где $k \neq 0$, то получится дробь, тождественно равная первоначальной.

218. Известно, что $a - b = 9$. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36}{(a-b)^2}$; б) $\frac{108}{(b-a)^2}$; в) $\frac{(5a-5b)^2}{45}$; г) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^3-b^3}$.

219. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$, то $a = b = c$.

К параграфу 2

220. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^2-2x}{x-3}-\dfrac{4x-9}{x-3}$; в) $\dfrac{a^2}{a^2-b^2}+\dfrac{b^2}{b^2-a^2}$;

б) $\dfrac{y^2-10}{y-8}-\dfrac{54}{y-8}$; г) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-y^2}-\dfrac{2y-y^2}{y^2-x^2}$.

221. Докажите, что тождественно равно многочлену выражение:

а) $\dfrac{(y-b)^2}{y-b+1}+\dfrac{y-b}{y-b+1}$; в) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y-1}+\dfrac{x+y}{y-x+1}$;

б) $\dfrac{(a+x)^2}{a+x-2}-\dfrac{2a+2x}{a+x-2}$; г) $\dfrac{b^2-9c^2}{b+3c-2}+\dfrac{2(b-3c)}{2-b-3c}$.

222. Докажите, что если правильная обыкновенная дробь $\dfrac{a}{b}$ несократима, то дробь, дополняющая ее до единицы, также несократима.

223. При каких натуральных n является натуральным числом значение выражения:

а) $\dfrac{n+6}{n}$; б) $\dfrac{5n-12}{n}$; в) $\dfrac{36-n^2}{n^2}$?

224. Найдите значение выражения, зная, что $\dfrac{x}{y}=5$:

а) $\dfrac{x+y}{y}$; б) $\dfrac{x-y}{y}$; в) $\dfrac{y}{x}$; г) $\dfrac{x+2y}{x}$.

225. Зная, что $\dfrac{x+y}{y}=3$, найдите значение выражения:

а) $\dfrac{x}{y}$; б) $\dfrac{y}{x+y}$; в) $\dfrac{x-y}{y}$; г) $\dfrac{y}{x}$.

226. Выполните сложение или вычитание дробей:

а) $\dfrac{3b^2-5b-1}{b^2y}+\dfrac{5b-3}{by}$; в) $\dfrac{1+c}{c^3y^4}-\dfrac{c^3+y^4}{c^2y^8}$;

б) $\dfrac{a^2-a+1}{a^3x}-\dfrac{x^2-1}{ax^3}$; г) $\dfrac{c^2+x^2}{c^2x^5}-\dfrac{c+x}{c^3x^3}$.

227. Представьте в виде дроби:

а) $x+y+\dfrac{x-y}{4}$; в) $a-\dfrac{ab+ac+bc}{a+b+c}$;

б) $m+n-\dfrac{1+mn}{n}$; г) $a^2-b^2-\dfrac{a^3-b^3}{a+b}$.

228. Упростите выражение:

а) $\dfrac{mn+1}{m+n}+\dfrac{mn-1}{m-n}$; б) $\dfrac{x+4a}{3a+3x}-\dfrac{a-4x}{3a-3x}$.

229. Упростите выражение:

а) $\dfrac{2y^2-y}{y^2-y+\frac{1}{4}}-\dfrac{2y^2+y}{y^2+y+\frac{1}{4}}-\dfrac{1}{y^2-\frac{1}{4}}$; б) $\dfrac{6a}{2{,}25a^2-0{,}64}-\dfrac{8}{6a-3{,}2}$.

$\boxed{\textbf{230.}}$ Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения равно нулю:

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}.$$

231. Упростите выражение:

а) $\dfrac{5}{y-3}+\dfrac{1}{y+3}-\dfrac{4y-18}{y^2-9}$; г) $\dfrac{1}{(x+y)^2}-\dfrac{2}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{(x-y)^2}$;

б) $\dfrac{2a}{2a+3}+\dfrac{5}{3-2a}-\dfrac{4a^2+9}{4a^2-9}$; д) $\dfrac{4a^2+3a+2}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}$;

в) $\dfrac{4m}{4m^2-1}-\dfrac{2m+1}{6m-3}+\dfrac{2m-1}{4m+2}$; е) $\dfrac{x-y}{x^2+xy+y^2}-\dfrac{3xy}{x^3-y^3}+\dfrac{1}{x-y}$.

232. Докажите, что тождественно равны выражения

$$\frac{ax+by}{(a-b)(x+y)}-\frac{bx-ay}{(a+b)(x+y)} \text{ и } \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

$\boxed{\textbf{233.}}$ Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$;

б) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.

234. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\dfrac{x^2-3x+6}{x-3}$; б) $\dfrac{y^2+5y-8}{y+5}$; в) $\dfrac{a^2+7a+2}{a+6}$; г) $\dfrac{3b^2-10b-1}{b-3}$.

$\boxed{\textbf{235.}}$ При каком значении a тождественно равны выражения:

а) $\dfrac{2x}{x+3}$ и $2+\dfrac{a}{x+3}$; в) $\dfrac{2x}{3-x}$ и $\dfrac{a}{3-x}-2$;

б) $\dfrac{x}{x-5}$ и $1+\dfrac{a}{x-5}$; г) $\dfrac{x+2}{5-x}$ и $\dfrac{a}{5-x}-1$?

236. Представьте дробь в виде суммы или разности целого выражения и дроби:

а) $\frac{5x}{x+2}$; б) $\frac{-2x}{x-1}$; в) $\frac{2x}{5-x}$; г) $\frac{x-3}{2-x}$.

237. При каких целых n значение дроби является целым числом:

а) $\frac{5n^2+2n+3}{n}$; б) $\frac{(n-3)^2}{n}$; в) $\frac{3n}{n+2}$; г) $\frac{7n}{n-4}$?

238. Найдите такие значения a и b, при которых выполняется тождество:

а) $\frac{5x}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$;

б) $\frac{5x+31}{(x-5)(x+2)} = \frac{a}{x-5} - \frac{b}{x+2}$.

К параграфу 3

239. Упростите выражение:

а) $\frac{a^2+ax+ab+bx}{a^2-ax-ab+bx} \cdot \frac{a^2-ax-bx+ab}{a^2+ax-bx-ab}$;

б) $\frac{x^2-bx+ax-ab}{x^2+bx-ax-ab} : \frac{x^2+bx+ax+ab}{x^2-bx-ax+ab}$.

240. Докажите, что если $m \neq n$, $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то значение выражения $\frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$ не зависит от значений переменных.

241. Докажите, что при любом целом a и дробном x значение выражения

$$\left(a - \frac{a^2+x^2}{a+x}\right) \cdot \left(\frac{2a}{x} + \frac{4a}{a-x}\right)$$

является четным числом.

242. Докажите, что при любом значении x, большем 2, значение выражения

$$\left(\frac{x+1}{2x} + \frac{4}{x+3} - 2\right) : \frac{x+1}{x+3} - \frac{x^2-5x+3}{2x}$$

является отрицательным числом.

243. Упростите выражение:

а) $ab + \dfrac{ab}{a+b}\left(\dfrac{a+b}{a-b} - a - b\right)$;

б) $\left(\dfrac{y^2 - xy}{x^2 + xy} - xy + y^2\right) \cdot \dfrac{x}{x-y} + \dfrac{y}{x+y}$;

в) $\left(\dfrac{1}{(2a-b)^2} + \dfrac{2}{4a^2 - b^2} + \dfrac{1}{(2a+b)^2}\right) \cdot \dfrac{4a^2 + 4ab + b^2}{16a}$;

г) $\dfrac{4c^2}{(c-2)^4} : \left(\dfrac{1}{(c+2)^2} + \dfrac{1}{(c-2)^2} + \dfrac{2}{c^2 - 4}\right)$.

244. Упростите выражение:

а) $\left(x - \dfrac{4xy}{x+y} + y\right) \cdot \left(x + \dfrac{4xy}{x-y} - y\right)$;

б) $\left(a - \dfrac{1 - 2a^2}{1-a} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{1}{1-a}\right)$.

245. Докажите тождество

$$\frac{1}{p-2q} + \frac{6q}{4q^2 - p^2} - \frac{2}{p+2q} = -\frac{1}{2p} \cdot \left(\frac{p^2 + 4q^2}{p^2 - 4q^2} + 1\right).$$

246. Одно из тождеств, приведенных знаменитым математиком XVIII в. Л. Эйлером, выглядит так:

$$a^3 + b^3 + \left(\frac{b(2a^3 + b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3 = \left(\frac{a(a^3 + 2b^3)}{a^3 - b^3}\right)^3.$$

Докажите его.

247. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения

$$\frac{\frac{3}{2}a^2 - 2ab + \frac{2}{3}b^2}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{9}b^2} + \frac{6b}{\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b}$$

не зависит от a и b.

248. Представьте в виде рациональной дроби:

а) $\dfrac{x - \dfrac{yz}{y-z}}{y - \dfrac{xz}{x-z}}$; б) $\dfrac{\dfrac{a-x}{a} + \dfrac{x}{a-x}}{\dfrac{a+x}{a} - \dfrac{x}{a+x}}$; в) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}$; г) $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}$.

249. При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{3x}{x^2-4}}$; б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$?

250. Автомобиль проехал от пункта A до пункта B. До пункта C, находящегося в середине пути, он ехал со скоростью 60 км/ч, а далее из C в B — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем пути следования.

251. Три вязальщицы получили одинаковые заказы на изготовление салфеток. Первая из них может выполнить заказ за 8 ч, вторая — за 9 ч, а их ученица — за 12 ч. Они объединили заказы и стали выполнять их совместно. Через сколько часов работа была закончена?

252. Докажите, что если z является средним гармоническим положительных чисел a и b, причем $a \neq b$, то верно равенство

$$\frac{1}{z-a}+\frac{1}{z-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

253. Известно, что точка $P(-9;\ 18)$ принадлежит графику функции, заданной формулой вида $y=\frac{k}{x}$. Найдите значение k.

254. Принадлежит ли графику функции $y=\frac{1}{x}$ точка:

а) $A(40;\ 0{,}025)$; в) $C\left(0{,}016;\ 6\frac{1}{4}\right)$;

б) $B(0{,}03125;\ 32)$; г) $D(0{,}125;\ 0{,}8)$?

255. Известно, что график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $A(10;\ 2{,}4)$. Проходит ли график этой функции через точку:

а) $B(1;\ 24)$; б) $C\left(-\frac{1}{5};\ -120\right)$; в) $D(-2;\ 12)$?

256. Найдите область определения функции и постройте ее график:

а) $y=\dfrac{36}{(x+1)^2-(x-1)^2}$; в) $y=\dfrac{16}{(2-x)^2-(2+x)^2}$;

б) $y=\dfrac{18-12x}{x^2-3x}-\dfrac{6}{3-x}$; г) $y=\dfrac{3x(x+1)-3x^2+15}{x(x+5)}$.

257. Постройте график функции:

а) $y = \frac{4}{|x|}$; в) $y = \frac{1}{|x|}$; д) $y = -\frac{6}{|x|}$;

б) $y = \frac{2,4}{|x|}$; г) $y = \frac{-1}{|x|}$; е) $y = \frac{-3,6}{|x|}$.

258. Докажите, что функция, заданная формулой $y = \frac{17}{5x}$, является обратной пропорциональностью, и укажите коэффициент обратной пропорциональности.

259. Изобразите схематически график функции:

а) $y = \frac{3x}{8}$; б) $y = \frac{8}{3x}$.

260. При каких значениях k и b гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ проходят через точку:

а) $P(2;\ 1)$; б) $Q(-2;\ 3)$; в) $R(-1;\ 1)$?

261. Могут ли графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = ax + b$ пересекаться:

а) только в одной точке;
б) только в двух точках;
в) в трех точках?

262. Могут ли графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = ax + b$ пересекаться в двух точках, лежащих:

а) в одной четверти;
б) в первой и второй четвертях;
в) в первой и третьей четвертях?

Глава II КВАДРАТНЫЕ КОРНИ

§ 4 ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

10. Рациональные числа

В курсе математики мы встречались с различными числами. Числа 1, 2, 3, ..., которые употребляются при счете, называются натуральными числами. Они образуют множество *натуральных чисел*. Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль составляют множество *целых чисел*. Кроме целых, нам известны *дробные числа* (положительные и отрицательные). *Целые и дробные числа составляют множество рациональных чисел.*

Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой N (от первой буквы латинского слова naturalis — естественный, природный), множество целых чисел — буквой $\boldsymbol{Z}$ (от первой буквы немецкого слова Zahl — число), множество рациональных чисел — буквой $\boldsymbol{Q}$ (от первой буквы французского слова qutient — отношение). Для того чтобы записать, что какое-либо число принадлежит рассматриваемому множеству, используют знак $\in$. Например, утверждение, что число 2 является натуральным (или что число 2 принадлежит множеству натуральных чисел), можно записать так: $2 \in N$. Число -2 не является натуральным; это можно записать с помощью знака $\notin$: $-2 \notin N$.

Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют *подмножеством* множества A. Это записывается так: $B \subset A$ (читают: B подмножество множества A).

Любое натуральное число является целым числом. Поэтому множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел: $N \subset \boldsymbol{Z}$. Точно так же множество целых чисел есть подмножество множества рациональных чисел: $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Всякое рациональное число, как целое, так и дробное, можно представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Одно и то же рациональное число можно представить в таком виде разными способами.

Например,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{5}{10}=\frac{40}{80};\qquad -0{,}7=\frac{-7}{10}=\frac{-14}{20}=\frac{-28}{40};$$

$$5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{20}{4}.$$

Среди дробей, с помощью которых записывается данное рациональное число, всегда можно указать дробь с наименьшим знаменателем. Эта дробь несократима. Для целых чисел такая дробь имеет знаменатель, равный 1.

Термин «рациональное число» произошел от латинского слова ratio, что в переводе означает «отношение» (частное).

Рассмотрим вопрос о представлении рациональных чисел в виде десятичных дробей.

Представим в виде десятичной дроби число $\frac{1}{8}$. Для этого разделим числитель дроби на ее знаменатель. Получим:

$$\begin{array}{r|l}
1 & 8 \\ \hline
-\,10 & 0{,}125 \\
8 & \\ \hline
-\,20 & \\
16 & \\ \hline
-\,40 & \\
40 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Таким образом, $\frac{1}{8}=0{,}125$.

Точно так же можно показать, что $\frac{2}{5}=0{,}4$; $1\frac{3}{20}=1{,}15$; $-\frac{1}{40}=-0{,}025$.

Применим теперь этот способ обращения обыкновенной дроби в десятичную к числу $\frac{8}{37}$. Делим числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
8 & 37 \\ \cline{2-2}
-80 & 0,216216 \\
74 & \\ \cline{1-1}
-60 & \\
37 & \\ \cline{1-1}
-230 & \\
222 & \\ \cline{1-1}
-80 & \\
74 & \\ \cline{1-1}
-60 & \\
37 & \\ \cline{1-1}
-230 & \\
222 & \\ \cline{1-1}
8 &
\end{array}
$$

Первым остатком, полученным при делении, является само число 8. Второй остаток равен 6, третий равен 23. Затем опять получили в остатке 8. Продолжая деление, мы, как и раньше, приписываем к остаткам нули. Поэтому следующим остатком снова будет 6, потом получим остаток, равный 23, опять остаток, равный 8, и т. д. Сколько бы мы ни продолжали деление, мы не получим в остатке 0. Значит, деление никогда не закончится. Говорят, что дробь $\frac{8}{37}$ обращается в *бесконечную десятичную дробь* 0,216216...:

$$\frac{8}{37} = 0,216216\ldots .$$

Так как при делении числителя 8 на знаменатель 37 последовательно повторяются остатки 8, 6 и 23, то в частном в одном и том же порядке будут повторяться три цифры: 2, 1, 6. Бесконечные десятичные дроби такого вида называют *периодическими*. Повторяющаяся группа цифр составляет *период дроби*. При записи периодических десятичных дробей период пишут один раз, заключая его в круглые скобки:

$$\frac{8}{37} = 0,(216).$$

Эта запись читается так: нуль целых, двести шестнадцать в периоде.

Число $\frac{7}{12}$ также записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\frac{7}{12} = 0,5833\ldots = 0,58(3)$. Эта запись читается: нуль целых, пятьдесят восемь сотых, три в периоде.

Точно так же можно показать, что $5\frac{1}{6} = 5{,}1(6)$, $-\frac{5}{11} = -0{,}(45)$.

Вообще каждое дробное число можно представить либо в виде десятичной дроби (конечной десятичной дроби), либо в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби, приписав справа в качестве десятичных знаков бесконечную последовательность нулей. Например:

$$2{,}5 = 2{,}5000\ldots; \quad -3 = -3{,}000\ldots.$$

Таким образом,

каждое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Верно и обратное утверждение:

каждая бесконечная десятичная периодическая дробь представляет некоторое рациональное число.

Например, $0{,}(3) = \frac{1}{3}$; $2{,}(36) = 2\frac{4}{11}$; $0{,}0(945) = \frac{7}{74}$. Эти равенства легко проверить, выполнив деление.

Разные бесконечные десятичные периодические дроби представляют разные рациональные числа. Исключением являются дроби с периодом 9, которые считают другой записью дробей с периодом 0:

$$0{,}(9) = 0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots = 1;$$
$$16{,}1(9) = 16{,}1999\ldots = 16{,}2000\ldots = 16{,}2.$$

Бесконечные десятичные дроби с периодом 9 заменяют дробями с периодом 0. Заметим, что при обращении обыкновенной дроби в десятичную не может получиться дробь с периодом 9.

Упражнения

263. Какие из чисел -100; $-14{,}5$; -2; $-\frac{2}{3}$; 0; 10; 15; $20\frac{1}{6}$ являются:

а) натуральными; б) целыми; в) рациональными?

264. Верно ли, что:

а) $-4 \in N$; $-4 \in Z$; $-4 \in Q$;

б) $5{,}6 \notin N$; $5{,}6 \in Z$; $5{,}6 \in Q$;

в) $28 \in N$; $28 \in Z$; $28 \in Q$?

265. Представьте в виде отношения целого числа к натуральному несколькими способами числа $1\frac{2}{5}$; 0,3; $-3\frac{1}{4}$; –27; 0.

266. Представьте в виде дроби с наименьшим натуральным знаменателем числа 36; –45; 4,2; –0,8; $15\frac{1}{6}$; $-\frac{2}{9}$.

267. Представьте в виде бесконечной десятичной дроби число:

а) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{7}$; д) $-\frac{8}{15}$; ж) –17; и) $-1\frac{3}{40}$;

б) $\frac{5}{6}$; г) $-\frac{20}{9}$; е) 10,28; з) $\frac{3}{16}$; к) $2\frac{7}{11}$.

268. Сравните рациональные числа:

а) 0,013 и 0,1004; г) $\frac{3}{8}$ и 0,375; ж) –2,005 и –2,04;

б) –24 и 0,003; д) –1,174 и $-1\frac{7}{40}$; з) $-1\frac{3}{4}$ и –1,75;

в) –3,24 и –3,42; е) $\frac{10}{11}$ и $\frac{11}{12}$; и) 0,437 и $\frac{7}{16}$.

269. Укажите какое-либо число, которое:

а) больше $\frac{1}{8}$, но меньше $\frac{1}{7}$; б) больше $\frac{1}{6}$, но меньше $\frac{1}{5}$.

270. Укажите несколько чисел, заключенных между:

а) 10 и 10,1; б) –0,001 и 0; в) –1001 и –1000; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

271. Назовите пять чисел, заключенных между числами:

а) 1,3 и 1,4; б) 5 и $5\frac{1}{6}$; в) –10 000 и –1000; г) $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$.

П

272. Упростите выражение:

а) $\frac{a}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$; б) $\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{x}{x^2-1}$.

273. Докажите, что:

а) квадрат четного числа есть число четное;

б) квадрат нечетного числа есть число нечетное.

274. Найдите:

а) $|x|$, если $x = 10$; $0{,}3$; 0; $-2{,}7$; -9;

б) x, если $|x| = 6$; $3{,}2$; 0.

275. Запишите без знака модуля выражение:

а) $|a|$, где $a > 0$; б) $|c|$, где $c < 0$; в) $|2b|$, где $b < 0$.

11. Иррациональные числа

Пусть точка O — начальная точка координатной прямой и OE — единичный отрезок. С помощью отрезка OE можно измерить длину любого отрезка.

Измерим, например, длину отрезка OB (рис. 9). Отрезок OE укладывается в отрезке OB два раза, и при этом получается остаток CB, который меньше единичного отрезка. Значит, число 2 есть приближенное значение (с недостатком) длины отрезка OB с точностью до 1:

$$OB \approx 2.$$

Рис. 9

Чтобы получить более точный результат, разделим единичный отрезок OE на 10 равных частей (рис. 10). Десятая часть отрезка OE укладывается в остатке CB три раза. При этом получается новый остаток DB, меньший десятой части отрезка OE. Число 2,3 есть приближенное значение (с недостатком) длины отрезка OB с точностью до 0,1:

$$OB \approx 2{,}3.$$

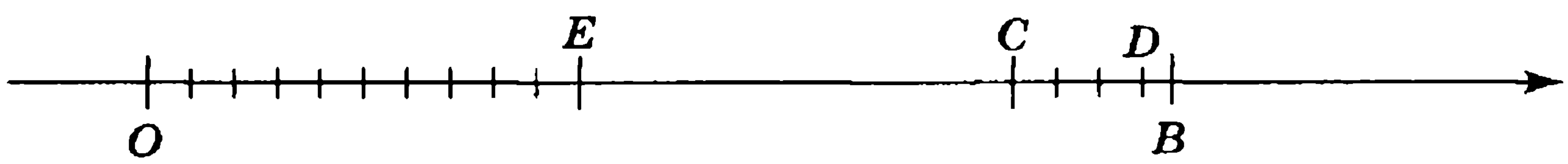


Рис. 10

Продолжая процесс измерения, мы будем использовать сотую, тысячную и т. д. доли единичного отрезка и получать приближенные значения длины отрезка OB (с недостатком) с точностью до 0,01, 0,001 и т. д.

В процессе десятичного измерения могут представиться два случая: либо на каком-то шаге не получится остатка, либо остатки будут получаться на каждом шаге.

В первом случае результатом измерения окажется натуральное число или десятичная дробь, во втором случае — бесконечная десятичная дробь. Так как всякое натуральное число и всякую десятичную дробь можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, то можно считать, что результатом десятичного измерения длины отрезка всегда является бесконечная десятичная дробь.

Пример 1. Пусть отрезок OC равен $\frac{7}{4}$ единичного отрезка. При десятичном измерении его длины получим число 1,75, т. е. ту же десятичную дробь, что и при делении 7 на 4. Результат измерения можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби 1,75000... .

Пример 2. Пусть отрезок OF равен $\frac{8}{3}$ единичного отрезка. При десятичном измерении его длины, как и при делении 8 на 3, получится бесконечная десятичная периодическая дробь 2,666... .

Пример 3. Пусть отрезок OK равен диагонали квадрата, стороной которого служит единичный отрезок (рис. 11). Построим на диагонали единичного квадрата новый квадрат (рис. 12). Из рисунка 12 видно, что площадь этого квадрата в два раза больше площади единичного квадрата. Значит, она равна 2. Так как отрезок OK равен стороне нового квадрата, то длина отрезка OK равна числу, квадрат которого равен 2.

При десятичном измерении отрезка OK получится бесконечная десятичная дробь, которая не является периодической. Это объясняется тем, что

среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2.

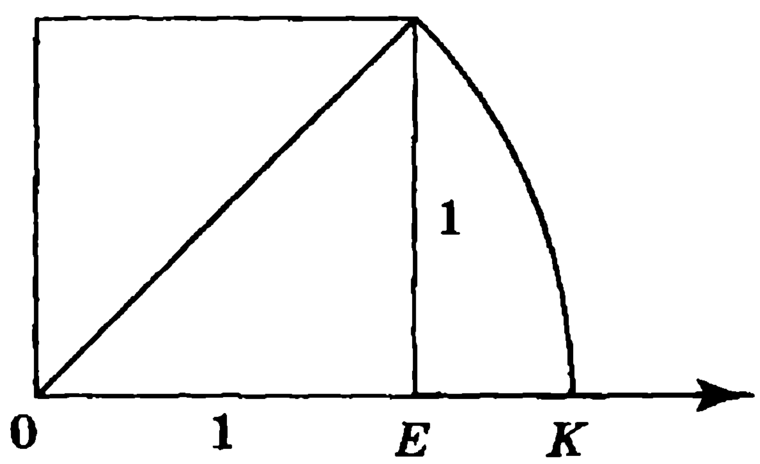


Рис. 11

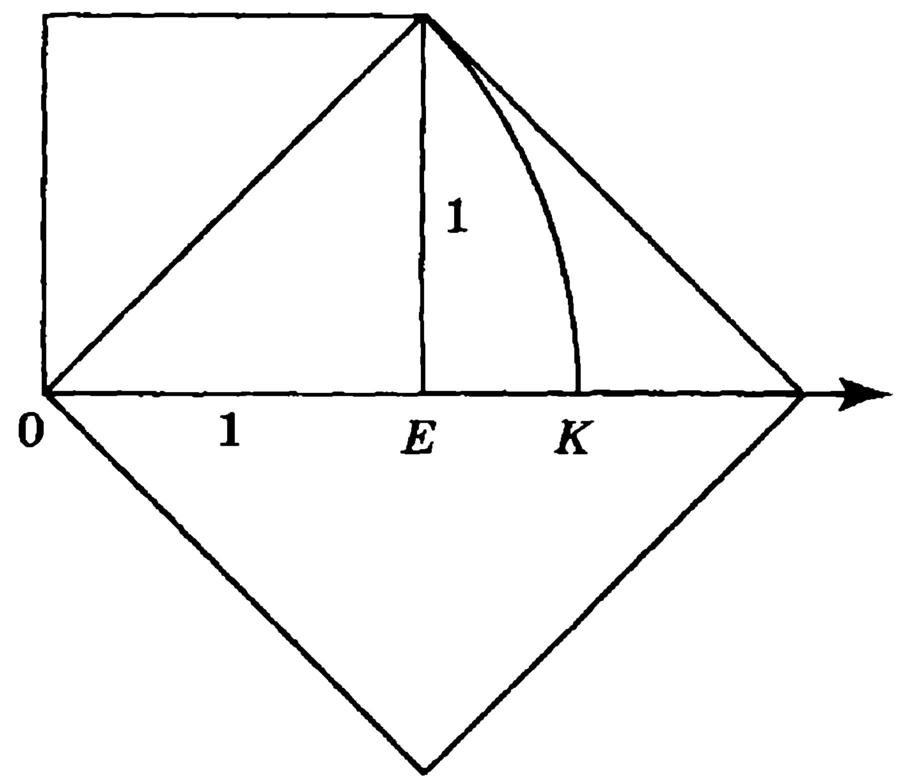


Рис. 12

● Предположим, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. Тогда это число можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное. Так как $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, то $\frac{m^2}{n^2} = 2$ и $m^2 = 2n^2$. Число $2n^2$ четное, значит, и равное ему число m^2 четное. Но тогда и само число m является четным (если бы число m было нечетным, то и число m^2 было бы нечетным). Поэтому число m можно представить в виде $m = 2k$, где k — целое число. Подставим $2k$ вместо m в равенство $m^2 = 2n^2$. Получим: $(2k)^2 = 2n^2$, $4k^2 = 2n^2$, $2k^2 = n^2$.

Число $2k^2$ четное, значит, число n^2 тоже четное. Тогда и число n является четным, т. е. числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — числа четные. Это противоречит тому, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Значит, неверно предположение, что число, квадрат которого равен 2, является рациональным. ○

Итак, десятичное измерение длин отрезков каждой точке координатной прямой, лежащей справа от начальной точки O, ставит в соответствие положительную бесконечную десятичную дробь. Наоборот, взяв произвольную положительную бесконечную десятичную дробь, мы можем найти на координатной прямой справа от точки O единственную точку A, такую, что длина отрезка OA выражается этой дробью.

Если к положительным бесконечным десятичным дробям присоединить противоположные им числа и число нуль, то получим множество чисел, которые называют *действительными числами*.

Каждому действительному числу соответствует единственная точка координатной прямой, и каждой точке координатной прямой соответствует единственное действительное число. Говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует *взаимно однозначное соответствие*.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой $\boldsymbol{R}$ (от первой буквы латинского слова realis — реальный, существующий в действительности).

Если $A(x_1)$ и $B(x_2)$ — две точки координатной прямой, то расстояние между этими точками, т. е. длину отрезка AB, можно найти по формуле

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Бесконечные десятичные дроби могут быть периодическими и непериодическими. Бесконечные десятичные периодические дроби представляют рациональные числа. Каждое такое число можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют *иррациональными числами* (приставка «ир» означает «отрицание»). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число, а n — натуральное. Таким образом,

множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Приведем примеры иррациональных чисел:

3,010010001... (единицы разделяются последовательно одним, двумя, тремя и т. д. нулями);

–5,020022000222... (число нулей и число двоек каждый раз увеличивается на единицу).

Иррациональным числом является число π, выражающее отношение длины окружности к диаметру:

$$\pi = 3{,}1415926\ldots .$$

Действительные числа, записанные с помощью бесконечных десятичных дробей, сравнивают по тем же правилам, что и конечные десятичные дроби.

Сравним, например, числа 2,36366... и 2,37011... . В этих положительных бесконечных десятичных дробях совпадают целые части и цифры десятых, а в разряде сотых у первой дроби число единиц меньше, чем у второй. Поэтому

$$2{,}36366\ldots < 2{,}37011\ldots .$$

Сравним числа 0,253... и –0,149... . Первое из этих чисел положительное, а второе — отрицательное. Поэтому

$$0{,}253\ldots > -0{,}149\ldots .$$

Действительные числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (при условии, что делитель отличен от нуля), причем действия над действительными числами обладают теми же свойствами, что и действия над рациональными числами. При выполнении действий над действительными числами в практических задачах их заменяют приближенными значениями. Повышая точность, с которой берутся приближенные значения, получают более точное значение результата.

Пример 1. Найдем приближенное значение суммы чисел a и b, где $a = \frac{1}{3}$, $b = 1{,}7132\ldots$.

▶ Возьмем приближенные значения слагаемых с точностью до 0,1: $a \approx 0{,}3$, $b \approx 1{,}7$. Получим:

$$a + b \approx 0{,}3 + 1{,}7 = 2{,}0.$$

Если взять приближенные значения слагаемых с точностью до 0,01, т. е. $a \approx 0{,}33$ и $b \approx 1{,}71$, то получим:

$$a + b \approx 0{,}33 + 1{,}71 = 2{,}04. \quad ◁$$

Пример 2. Найдем длину окружности, радиус r которой равен 5 м.

▶ Длина окружности l вычисляется по формуле $l = 2\pi r$. Взяв $\pi \approx 3{,}14$, получим

$$l \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4 \text{ (м)}. \quad ◁$$

Упражнения

276. Приведите пример:

а) рационального числа; б) иррационального числа.

277. Верно ли, что:

а) каждое рациональное число является действительным;
б) каждое действительное число является рациональным;
в) каждое иррациональное число является действительным;
г) каждое действительное число является иррациональным?

278. Среди чисел $\frac{1}{7}$; 0; 0,25; −2,(3); 0,818118111... (число единиц, разделяющих восьмерки, каждый раз увеличивается на одну); 4,2(51); 217; π укажите рациональные и иррациональные.

КАРЛ ВЕЙЕРШТРАСС (1815—1897) — немецкий математик, почетный член Петербургской Академии наук. Имеет многочисленные труды по математическому анализу и другим разделам математики.

279. Верно ли, что:

а) $7{,}16 \in \boldsymbol{N}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Z}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{Q}$; $7{,}16 \in \boldsymbol{R}$;

б) $409 \in \boldsymbol{N}$; $409 \in \boldsymbol{Z}$; $409 \in \boldsymbol{Q}$; $409 \in \boldsymbol{R}$;

в) $\pi \in \boldsymbol{N}$; $\pi \in \boldsymbol{Z}$; $\pi \in \boldsymbol{Q}$; $\pi \in \boldsymbol{R}$?

280. Сравните:

а) 7,653... и 7,563...;

б) 0,123... и 0,114...;

в) −48,075... и −48,275...;

г) −1,444... и −1,456... .

281. Какое из чисел больше:

а) 1,(56) или 1,56;

б) −4,(45) или −4,45;

в) $1\frac{2}{3}$ или 1,6668;

г) −0,228 или $-\frac{5}{22}$;

д) π или 3,1415;

е) 3,(14) или π?

282. Сравните числа:

а) 9,835... и 9,847...;

б) −1,(27) и −1,272;

в) $2\frac{1}{7}$ и 2,142;

г) 1,(375) и $1\frac{3}{8}$.

283. Найдите расстояние между точками M и K координатной прямой, если:

а) $M\,(7{,}45)$ и $K\,(1{,}15)$;

б) $M\left(-5\frac{1}{3}\right)$ и $K\left(3\frac{2}{3}\right)$.

284. Какая из точек C или D координатной прямой ближе к точке M, если:

а) $C\,(4{,}514)$, $D\,(-1{,}9368...)$, $M\,(1{,}304)$;

б) $C\,(-2{,}4815...)$, $D\,(11{,}454)$, $M\,(4{,}586)$.

285. Расположите в порядке возрастания числа

4,62; 3,(3); −2,75...; −2,63... .

286. Расположите в порядке убывания числа

1,371...; 2,065; 2,056...; 1,(37); −0,078... .

287. Какие целые числа расположены между числами:

а) −3,168... и 2,734...;

б) −5,106... и −1,484...?

288. Найдите приближенное значение выражения $a + b$, где $a = 1{,}0539...$ и $b = 2{,}0610...$, округлив предварительно a и b:

а) до десятых;

б) до сотых;

в) до тысячных.

289. Найдите приближенное значение выражения $a - b$, где $a = 59{,}678\ldots$ и $b = 43{,}123\ldots$, округлив предварительно a и b:
а) до десятых; б) до сотых.

290. Найдите приближенное значение длины окружности, радиус которой равен 4,5 см (число π округлите до сотых).

291. Найдите приближенное значение площади круга, радиус которого равен 10 м (число π округлите до сотых).

292. Является ли рациональным или иррациональным числом сумма $a + b$, где $a = 1{,}323223222\ldots$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трех двоек и т. д., разделяются тройками) и $b = 2{,}313113111\ldots$ (группы цифр, состоящие из одной, двух, трех единиц и т. д., разделяются тройками)?

293. Известно, что a^2, b^2, $a - b$, a и b — рациональные числа и $a \neq b$. Каким числом, рациональным или иррациональным, является сумма $a + b$?

294. Упростите выражение

$$\left(\frac{a+b}{b} - \frac{a}{a+b}\right) : \left(\frac{a+b}{a} - \frac{b}{a+b}\right).$$

295. Найдите значение выражения $|2x - 8|$ при $x = -2{,}5$; 0; 4; 5; 9,5.

296. Известно, что график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(4; -0{,}5)$. Найдите k и постройте этот график.

297. При каких значениях a и b графики функций $y = x + b$ и $y = ax - 2b$ пересекаются в точке (3; 1)?

Контрольные вопросы

1. Какие числа образуют множество действительных чисел?
2. Какие действительные числа можно и какие нельзя представить в виде отношения целого числа к натуральному?
3. Приведите пример бесконечной десятичной дроби, которая является: а) рациональным числом; б) иррациональным числом.

§ 5 АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

12. Квадратные корни. Арифметический квадратный корень

Пусть площадь квадрата равна 64 см^2. Чему равна длина стороны этого квадрата?

Обозначим длину стороны квадрата (в сантиметрах) буквой x. Тогда площадь квадрата будет x^2 см^2. По условию площадь равна 64 см^2, значит, $x^2 = 64$.

Корнями уравнения $x^2 = 64$ являются числа: 8 и -8. Действительно, $8^2 = 64$ и $(-8)^2 = 64$. Так как длина не может выражаться отрицательным числом, то условию задачи удовлетворяет только один из корней — число 8. Итак, длина стороны квадрата равна 8 см.

Корни уравнения $x^2 = 64$, т. е. числа, квадраты которых равны 64, называют *квадратными корнями* из числа 64.

Определение. Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a.

Число 8 — неотрицательный корень уравнения $x^2 = 64$ — называют *арифметическим квадратным корнем* из 64. Иначе говоря, арифметический квадратный корень из 64 — это неотрицательное число, квадрат которого равен 64.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют *знаком арифметического квадратного корня* или знаком радикала (от латинского слова radex — корень). Выражение, стоящее под знаком корня, называют *подкоренным выражением*. Запись $\sqrt{a}$ читают: квадратный корень из a (слово «арифметический» при чтении опускают).

Приведем примеры нахождения (или, как говорят иначе, извлечения) арифметических квадратных корней:

$\sqrt{4} = 2$, так как 2 — число неотрицательное и $2^2 = 4$;

$\sqrt{1,21} = 1,1$, так как 1,1 — число неотрицательное и $1,1^2 = 1,21$;

$\sqrt{0} = 0$, так как 0 — число неотрицательное и $0^2 = 0$.

Вообще

$\sqrt{a} = b$, если выполняются два условия:

$$1)\ b \geqslant 0; \qquad 2)\ b^2 = a.$$

При $a < 0$ выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Действительно, квадрат любого числа есть число неотрицательное. Например, не имеют смысла выражения $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-3{,}7}$.

Из определения арифметического квадратного корня следует, что

при любом a, при котором выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, верно равенство

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Упражнения

298. Докажите, что:

а) число 5 есть арифметический квадратный корень из 25;
б) число 0,3 есть арифметический квадратный корень из 0,09;
в) число -7 не является арифметическим квадратным корнем из 49;
г) число 0,6 не является арифметическим квадратным корнем из 3,6.

299. Докажите, что:

а) $\sqrt{121} = 11$; б) $\sqrt{169} = 13$; в) $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$; г) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

300. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{81}$; в) $\sqrt{1600}$; д) $\sqrt{0{,}04}$; ж) $\sqrt{\frac{81}{4}}$;

б) $\sqrt{36}$; г) $\sqrt{10\,000}$; е) $\sqrt{0{,}81}$; з) $\sqrt{1\frac{24}{25}}$.

301. Вычислите:

а) $\sqrt{900}$; б) $\sqrt{0{,}01}$; в) $\sqrt{0{,}64}$; г) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; д) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

302. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{a+b}$ при $a = 33$, $b = -8$; $a = 0{,}65$, $b = 0{,}16$;
б) $\sqrt{3x-5}$ при $x = 23$; 1,83;
в) $x + \sqrt{x}$ при $x = 0$; 0,01; 0,36; 0,64; 1; 25; 100; 3600.

303. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ при $x=\frac{9}{25}$, $y=0,36$;

б) $\sqrt{4-2a}$ при $a=2$; $-22,5$.

304. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}$; в) $3\sqrt{9}-16$; д) $0,1\sqrt{400}+0,2\sqrt{1600}$;

б) $\sqrt{0,04}-\sqrt{0,01}$; г) $-7\sqrt{0,36}+5,4$; е) $\frac{1}{3}\sqrt{0,36}+\frac{1}{5}\sqrt{900}$.

305. Найдите значение выражения:

а) $0,6\sqrt{36}$; д) $-\sqrt{0,0036}+\sqrt{0,0025}$;

б) $-2,5\sqrt{25}$; е) $\sqrt{0,01}-\sqrt{0,0001}$;

в) $\sqrt{0,49}+\sqrt{0,16}$; ж) $\frac{1}{3}\sqrt{0,81}-1$;

г) $\sqrt{0,64}-\sqrt{0,04}$; з) $4-10\sqrt{0,01}$.

306. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, найдите:

а) $\sqrt{225}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{324}$, $\sqrt{361}$;

б) $\sqrt{1,44}$, $\sqrt{3,24}$, $\sqrt{2,56}$, $\sqrt{2,25}$;

в) $\sqrt{576}$, $\sqrt{1764}$, $\sqrt{3721}$, $\sqrt{7396}$;

г) $\sqrt{7,29}$, $\sqrt{13,69}$, $\sqrt{56,25}$, $\sqrt{77,44}$.

307. Укажите натуральные значения n, при которых является натуральным числом значение выражения: а) $\sqrt{11-n}$; б) $\sqrt{25-n}$.

308. Какая из точек — A или B — координатной прямой ближе к точке с координатой нуль, если:

а) $A(\sqrt{15,21})$, $B(-\sqrt{16})$; б) $A\left(\sqrt{2\frac{7}{9}}\right)$, $B\left(-\sqrt{1\frac{13}{36}}\right)$?

309. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{100}$; в) $-\sqrt{100}$; д) $\sqrt{(-25)\cdot(-4)}$;

б) $\sqrt{-100}$; г) $\sqrt{(-10)^2}$; е) $\sqrt{-25\cdot 4}$?

310. Найдите число, арифметический квадратный корень из которого равен 0; 1; 3; 10; 0,6.

311. Найдите значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x}=4$; в) $2\sqrt{x}=0$; д) $\sqrt{x}-8=0$;

б) $\sqrt{x}=0,5$; г) $4\sqrt{x}=1$; е) $3\sqrt{x}-2=0$.

312. Существует ли значение переменной x, при котором:

а) $\sqrt{x} = 0{,}1$; б) $\sqrt{x} = -10$; в) $\sqrt{x} + 1 = 0$; г) $\sqrt{x} - 3 = 0$?

313. При каком значении переменной x верно равенство:

а) $\sqrt{x} = 11$; в) $\sqrt{x} = -20$; д) $5 - \sqrt{x} = 0$;

б) $10\sqrt{x} = 3$; г) $2\sqrt{x} - 1 = 0$; е) $2 + \sqrt{x} = 0$?

314. Найдите значение переменной x, при котором верно равенство:

а) $\sqrt{3 + 5x} = 7$; б) $\sqrt{10x - 14} = 11$; в) $\sqrt{\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}} = 0$.

315. Найдите натуральные значения n, при которых значение выражения $\sqrt{n^2 + 39}$ является двузначным числом.

316. Постройте на миллиметровой бумаге график функции $y = x^2$ для значений x от -3 до 3. С помощью графика найдите:

а) значение y, соответствующее $x = -2{,}5$; $1{,}7$;

б) значения x, которым соответствует значение y, равное 5; $7{,}5$;

в) квадрат числа $-1{,}4$; $2{,}8$;

г) числа, квадраты которых равны $2{,}5$; 9.

317. Найдите значение выражения $1{,}5x^3y^2 \cdot 6{,}2xy$, если $x = 1{,}25$, $y = 4$.

318. Запишите без знака модуля:

а) $|a^2|$; б) $|a^3|$, где $a > 0$; в) $|a^3|$, где $a < 0$.

13. Уравнение $x^2 = a$

Рассмотрим уравнение $x^2 = a$, где a — произвольное число. В зависимости от числа a при решении этого уравнения возможны три случая.

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ корней не имеет. Действительно, не существует числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу.

Если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень, равный нулю, так как существует единственное число 0, квадрат которого равен нулю.

Если $a > 0$, то уравнение имеет два корня. Чтобы убедиться в этом, обратимся к графику функции $y = x^2$ (рис. 13). Прямая $y = a$

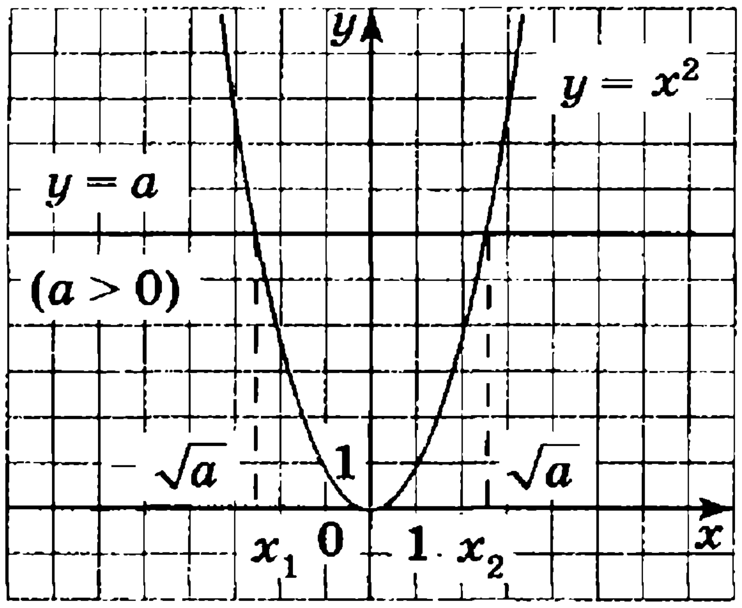


Рис. 13

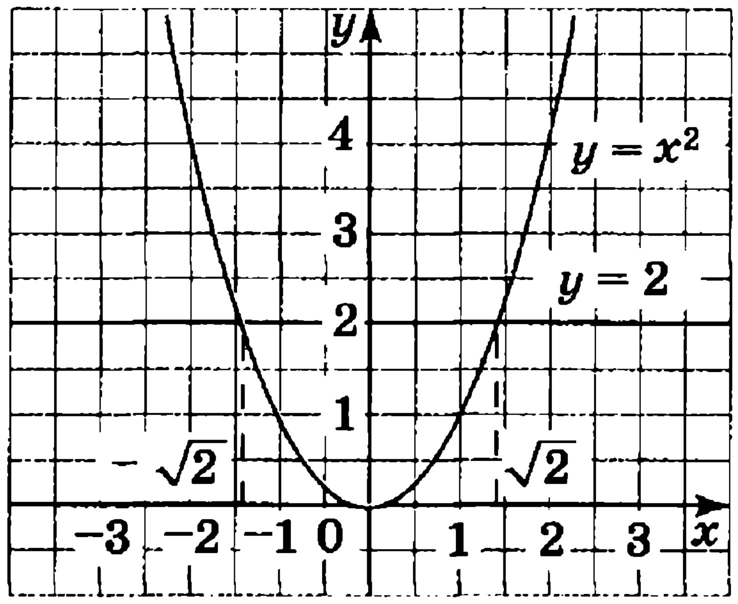


Рис. 14

при $a > 0$ пересекает параболу $y = x^2$ в двух точках. Обозначим абсциссы точек пересечения x_1 и x_2. Тогда $x_1^2 = a$ и $x_2^2 = a$, значит, числа x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 = a$. Так как x_2 есть положительное число, квадрат которого равен a, то x_2 является арифметическим квадратным корнем из a, т. е. $x_2 = \sqrt{a}$. Так как x_1 есть число, противоположное x_2, то $x_1 = -\sqrt{a}$.

Например, уравнение $x^2 = 49$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{49}$ и $x_2 = \sqrt{49}$, т. е. $x_1 = -7$ и $x_2 = 7$. Уравнение $x^2 = 6{,}25$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{6{,}25}$ и $x_2 = \sqrt{6{,}25}$, т. е. $x_1 = -2{,}5$ и $x_2 = 2{,}5$. Уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{\frac{4}{9}}$ и $x_2 = \sqrt{\frac{4}{9}}$, т. е. $x_1 = -\frac{2}{3}$ и $x_2 = \frac{2}{3}$.

Уравнение $x^2 = 2$ имеет корни $x_1 = -\sqrt{2}$ и $x_2 = \sqrt{2}$. Эти корни являются иррациональными числами, так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. С помощью графика функции $y = x^2$ легко найти приближенные значения этих корней: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $-\sqrt{2} \approx -1{,}4$ (рис. 14). Уравнения $x^2 = 3$, $x^2 = 5$, $x^2 = 6{,}5$ имеют соответственно корни $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$, $-\sqrt{6{,}5}$ и $\sqrt{6{,}5}$. Эти корни также являются иррациональными числами.

Мы видим, что при любом $a \geqslant 0$ уравнение $x^2 = a$ имеет неотрицательный корень $\sqrt{a}$; иными словами, какое бы число $a \geqslant 0$ мы ни взяли, найдется неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это означает, что

выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл при любом $a \geqslant 0$.

Упражнения

319. Имеет ли корни уравнение:
а) $x^2 = 81$; б) $x^2 = 18$; в) $x^2 = 0$; г) $x^2 = -25$?

320. Решите уравнение:
а) $x^2 = 36$; в) $x^2 = 121$; д) $x^2 = 8$;
б) $x^2 = 0{,}49$; г) $x^2 = 11$; е) $x^2 = 2{,}5$.

321. Решите уравнение и с помощью графика функции $y = x^2$ найдите приближенные значения его корней:
а) $x^2 = 3$; б) $x^2 = 5$; в) $x^2 = 4{,}5$; г) $x^2 = 8{,}5$.

322. Решите уравнение:
а) $80 + y^2 = 81$; в) $20 - b^2 = -5$; д) $\frac{1}{4}a^2 = 10$;
б) $19 + c^2 = 10$; г) $3x^2 = 1{,}47$; е) $-5y^2 = 1{,}8$.

323. Найдите корни уравнения:
а) $16 + x^2 = 0$; в) $0{,}5x^2 = 30$; д) $x^3 - 3x = 0$;
б) $0{,}3x^2 = 0{,}027$; г) $-5x^2 = \frac{1}{20}$; е) $x^3 - 11x = 0$.

324. Решите уравнение:
а) $(x - 3)^2 = 25$; б) $(x + 4)^2 = 9$; в) $(x - 6)^2 = 7$; г) $(x + 2)^2 = 6$.

325. Имеет ли смысл выражение $\sqrt{8 - 5x}$ при $x = -3{,}4$; 0; 1,2; 1,6; 2,4?

326. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:
а) $3\sqrt{a}$; б) $-5\sqrt{x}$; в) $\sqrt{8c}$; г) $\sqrt{-10b}$?

327. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:
а) $\sqrt{2x}$; б) $\sqrt{-x}$?

328. Найдите квадрат числа: $\sqrt{25}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{4}$; $\sqrt{5}$; $-\sqrt{6}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{1{,}3}$.

329. Найдите значение выражения:
а) $(\sqrt{7})^2$; в) $-2\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}$; д) $0{,}5(-\sqrt{8})^2$; ж) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;
б) $(-\sqrt{26})^2$; г) $(3\sqrt{5})^2$; е) $(-2\sqrt{15})^2$; з) $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)^2$.

330. Вычислите:

а) $0,49 + 2(\sqrt{0,4})^2$;

б) $(3\sqrt{11})^2 - \sqrt{6400}$;

в) $(2\sqrt{6})^2 + (-3\sqrt{2})^2$;

г) $-0,1(\sqrt{120})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{20}\right)^2$.

331. Вычислите:

а) $(2 - \sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5}$;

б) $(5 + \sqrt{3})^2 - 10\sqrt{3}$;

в) $(2 - \sqrt{5})^2 + (2 + \sqrt{5})^2$;

г) $(5 + \sqrt{3})^2 + (5 - \sqrt{3})^2$.

332. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{6} \cdot (-\sqrt{6})$;

б) $-(3\sqrt{5})^2$;

в) $\sqrt{1,44} - 2(\sqrt{0,6})^2$;

г) $(0,1\sqrt{70})^2 + \sqrt{1,69}$.

333. Найдите значение выражения $\frac{|x|}{x}$ при $x = -8$; -5; 1; 7; 128. Чему равно значение выражения $\frac{|x|}{x}$, если:

а) $x > 0$; б) $x < 0$?

334. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$ при $x = -0,5$;

б) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$ при $x = -0,4$.

335. Изобразите схематически в одной и той же системе координат графики функций $y = \frac{10}{x}$ и $y = 10x$. Имеют ли эти графики общие точки и если имеют, то сколько?

14. Нахождение приближенных значений квадратного корня

Рассмотрим, как можно находить приближенные значения арифметического квадратного корня.

Найдем, например, приближенное значение $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой.

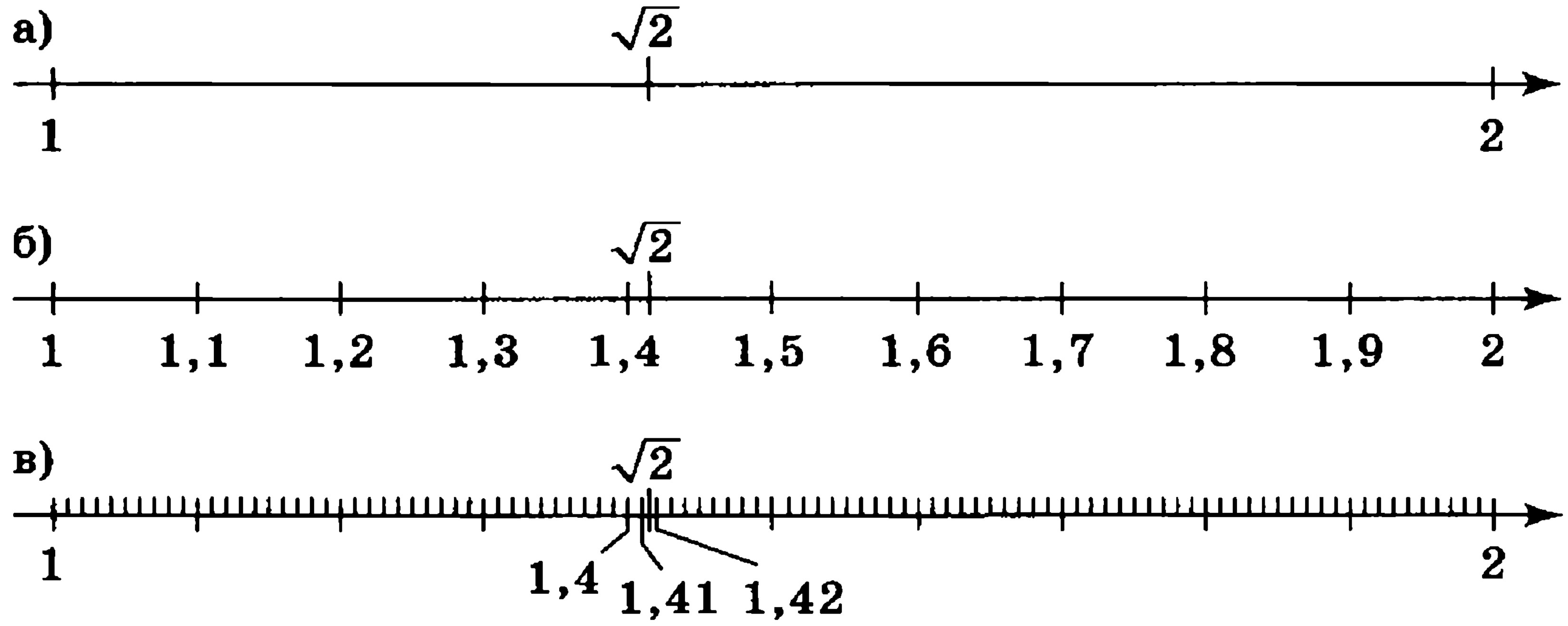


Рис. 15

Так как 1^2 меньше 2, а 2^2 больше 2, то число $\sqrt{2}$ заключено между целыми числами 1 и 2 (рис. 15, *а*). Значит, десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так:

$$\sqrt{2} = 1, \ldots .$$

Найдем теперь цифру десятых. Для этого будем возводить в квадрат десятичные дроби 1,1; 1,2; 1,3; ... , пока не получим число, большее двух. Имеем

$$1{,}1^2 = 1{,}21;\ \ 1{,}2^2 = 1{,}44;\ \ 1{,}3^2 = 1{,}69;$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96;\ \ 1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Так как $1{,}4^2$ меньше 2, а $1{,}5^2$ больше 2, то число $\sqrt{2}$ больше 1,4, но меньше 1,5 (рис. 15, *б*). Значит,

$$\sqrt{2} = 1{,}4\ldots .$$

Чтобы найти цифру сотых, будем последовательно возводить в квадрат десятичные дроби 1,41; 1,42; ... . Так как $1{,}41^2 = 1{,}9881$, а $1{,}42^2 = 2{,}0164$, то число $\sqrt{2}$ больше 1,41 и меньше 1,42 (рис. 15, *в*). Значит,

$$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots .$$

Продолжая этот процесс, найдем, что десятичная запись числа $\sqrt{2}$ начинается так: 1,414... . Поэтому

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Рассмотренный прием позволяет извлекать арифметический квадратный корень из числа с любой точностью. В практических расчетах для нахождения приближенных значений квадратных корней используют специальные таблицы или вычислительную технику.

Для извлечения квадратных корней с помощью калькулятора используют клавишу, на которой помещен знак $\sqrt{\ }$. Чтобы извлечь корень из некоторого числа, нужно ввести это число в калькулятор и затем нажать клавишу $\boxed{\sqrt{\ }}$. На экране высветится значение корня.

Пример 1. Найдем $\sqrt{42,5}$.

▶ Введем в калькулятор число 42,5 и нажмем клавишу со знаком $\sqrt{\ }$. На экране высветится число 6,5192024 — приближенное значение $\sqrt{42,5}$. Полученный результат округляют до требуемого числа знаков. Округлим, например, результат до сотых, получим

$$\sqrt{42,5} \approx 6,52. \triangleleft$$

Упражнения

336. Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а) $\sqrt{27}$; б) $\sqrt{40}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt{9,2}$; д) $\sqrt{0,4}$.

337. Найдите цифры разрядов единиц, десятых, сотых в десятичной записи иррационального числа $\sqrt{6}$.

338. С помощью калькулятора вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{x}$ при $x = 16; 0,25; 3; 245; 0,37$;

б) $\sqrt{x+4}$ при $x = 8,5; 14,1; 0,2549$.

339. Сравните числа:

а) $\sqrt{5}$ и 2; б) $\sqrt{7}$ и 3; в) $\sqrt{19}$ и $\sqrt{21}$.

340. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{5}-3}$; б) $\sqrt{4-\sqrt{12}}$?

341. Площадь квадрата равна 18 см^2. Найдите с помощью калькулятора его сторону с точностью до 0,1 см.

342. Какой записью выражения удобнее пользоваться для вычисления его значения на калькуляторе:

а) $\sqrt{(a+b)c}$ или $\sqrt{c(a+b)}$; б) $a+\sqrt{b}$ или $\sqrt{b}+a$?

343. Представьте выражение в удобном для вычисления на калькуляторе виде и найдите его значение (ответ округлите до сотых):

а) $\sqrt{48{,}5 \cdot 7{,}3 + 39{,}6 \cdot 7{,}3}$; б) $8{,}567 + \sqrt{54}$.

344. Найдите с помощью калькулятора (ответ округлите до сотых):

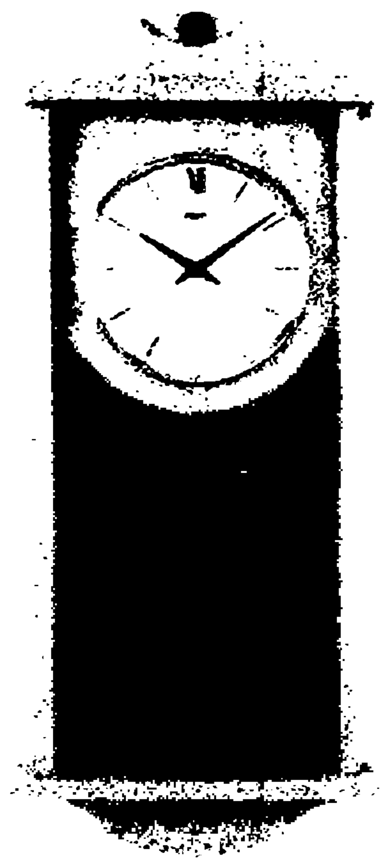
а) $6 + \sqrt{17}$; в) $\sqrt{10} + \sqrt{15}$; д) $\sqrt{3{,}4 \cdot 4{,}9}$;

б) $12 - \sqrt{34}$; г) $\sqrt{62} - \sqrt{48}$; е) $6{,}5 + 3\sqrt{7{,}8}$.

345. Длина стороны a_8 правильного восьмиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Найдите a_8 с помощью калькулятора (с точностью до 0,1), если: а) $R = 9{,}4$ см; б) $R = 10{,}5$ см.

346. Свободно падающее тело в безвоздушном пространстве проходит s см за t с, где $t = \sqrt{\dfrac{2s}{g}}$, g — ускорение свободного падения, $g \approx 10$ м/с^2. Пользуясь калькулятором, вычислите t с точностью до 0,1 с, если:

а) $s = 175$; б) $s = 225$.



347. Время t (с) полного колебания маятника вычисляется по формуле $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, где l (см) — длина маятника, $g \approx 10$ м/с^2, $\pi \approx 3{,}14$. Найдите с помощью калькулятора t с точностью до 0,1 с, если l равно:

а) 22; б) 126.

348. Решите уравнение и найдите с помощью калькулятора приближенные значения его корней (ответ округлите до сотых):

а) $x^2 = 30$; в) $(x - 3)^2 = 12$;

б) $7x^2 = 10$; г) $(x + 1)^2 = 8$.

349. Вычислите:

а) $3\sqrt{0{,}16} - 0{,}1\sqrt{225}$; в) $0{,}3\sqrt{1{,}21} \cdot \sqrt{400}$;

б) $0{,}2\sqrt{900} + 1{,}8\sqrt{\dfrac{1}{9}}$; г) $5 : \sqrt{0{,}25} \cdot \sqrt{0{,}81}$.

350. Найдите значение выражения $x + |x|$, если $x = 7; 10; 0; -3; -8$. Упростите выражение $x + |x|$, если: а) $x \geqslant 0$; б) $x < 0$.

351. Сократите дробь:

а) $\dfrac{4a^2 - 20a + 25}{25 - 4a^2}$; б) $\dfrac{9x^2 + 4y^2 - 12xy}{4y^2 - 9x^2}$.

15. Функция $y = \sqrt{x}$ и ее график

Пусть длина стороны квадрата равна a см, а его площадь равна S см^2. Каждому значению длины a стороны квадрата соответствует единственное значение его площади S. Зависимость площади квадрата от длины его стороны выражается формулой $S = a^2$, где $a \geqslant 0$. Наоборот, для каждого значения площади квадрата S можно указать соответствующее ему единственное значение длины стороны a. Зависимость длины стороны квадрата от его площади выражается формулой $a = \sqrt{S}$. Формулами $S = a^2$, где $a \geqslant 0$, и $a = \sqrt{S}$ задаются функциональные зависимости между одними и теми же переменными, однако в первом случае независимой переменной является длина a стороны квадрата, а во втором — площадь S.

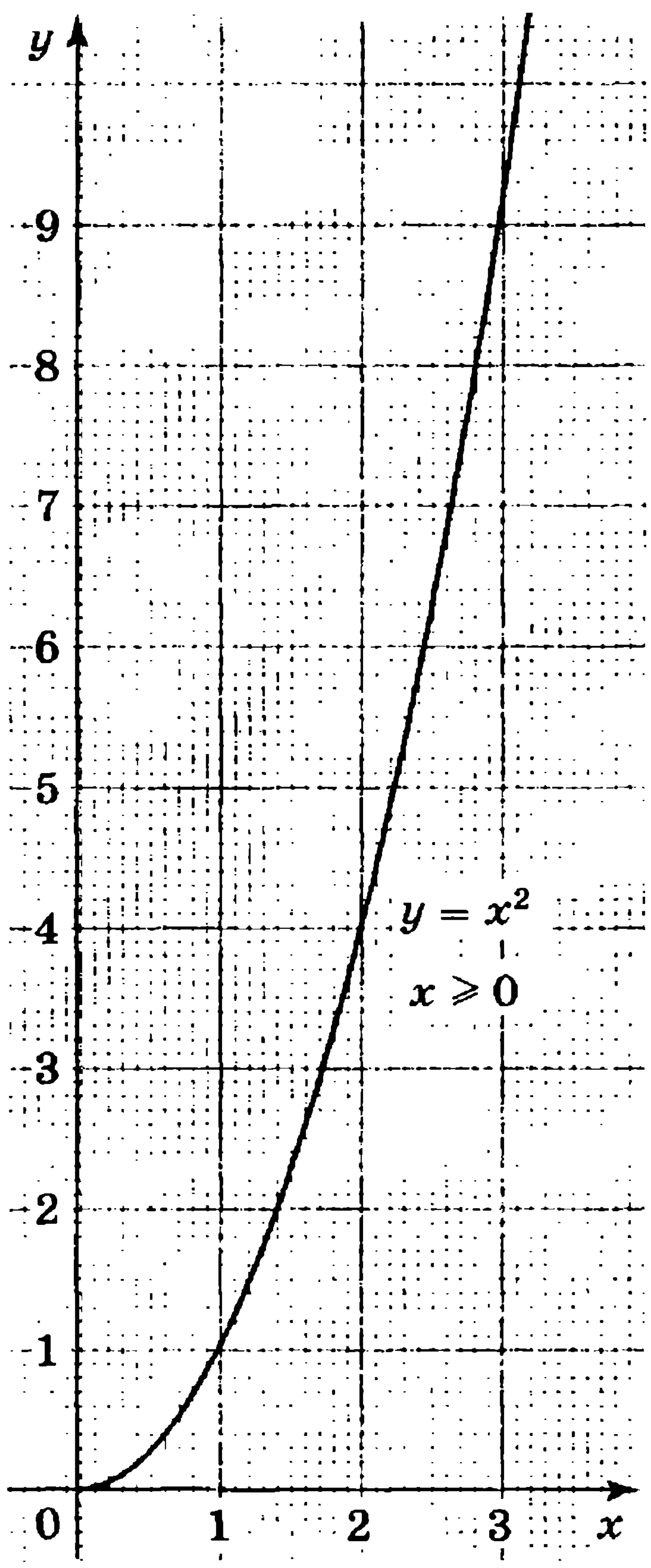


Рис. 16

Если в каждом случае обозначить независимую переменную буквой x, а зависимую переменную буквой y, то получим формулы

$$y = x^2, \text{ где } x \geqslant 0, \text{ и } y = \sqrt{x}.$$

Мы знаем, что графиком функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, является часть параболы — ее правая ветвь (рис. 16). Построим теперь график функции $y = \sqrt{x}$.

Так как выражение $\sqrt{x}$ имеет смысл при $x \geqslant 0$, то областью определения функции $y = \sqrt{x}$ служит множество неотрицательных чисел.

Составим таблицу значений функции $y = \sqrt{x}$ (приближенные значения y для значений x, не являющихся квадратами целых чисел, можно найти с помощью калькулятора).

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Проведя от начала координат через эти точки плавную линию, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 17).

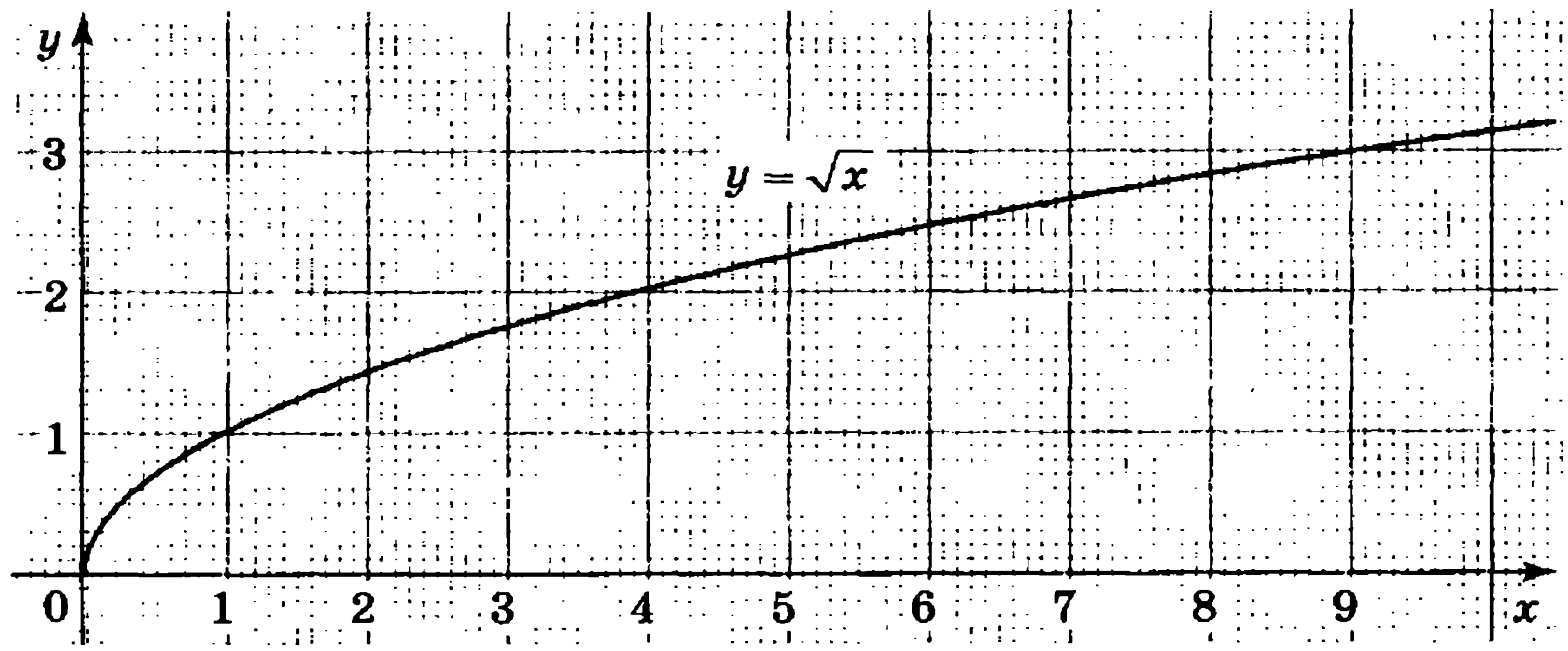


Рис. 17

Сформулируем некоторые *свойства* функции $y = \sqrt{x}$.

1. **Если $x = 0$, то $y = 0$,** поэтому начало координат принадлежит графику функции.
2. **Если $x > 0$, то $y > 0$;** график расположен в первой координатной четверти.
3. **Большему значению аргумента соответствует большее значение функции;** график функции идет вверх.

Например: $\sqrt{2,6} > \sqrt{1,5}$; $\sqrt{6} > \sqrt{3}$.

График функции $y = \sqrt{x}$, как и график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, представляет собой ветвь параболы. Это следует из того, что эти графики симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 18). Доказательство симметрии графиков основано на том, что точки с координатами $(a;\ b)$ и $(b;\ a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.

● Пусть точка $M\,(a;\ b)$ принадлежит графику функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$. Тогда верно равенство $b = a^2$. По условию a — неотрица-

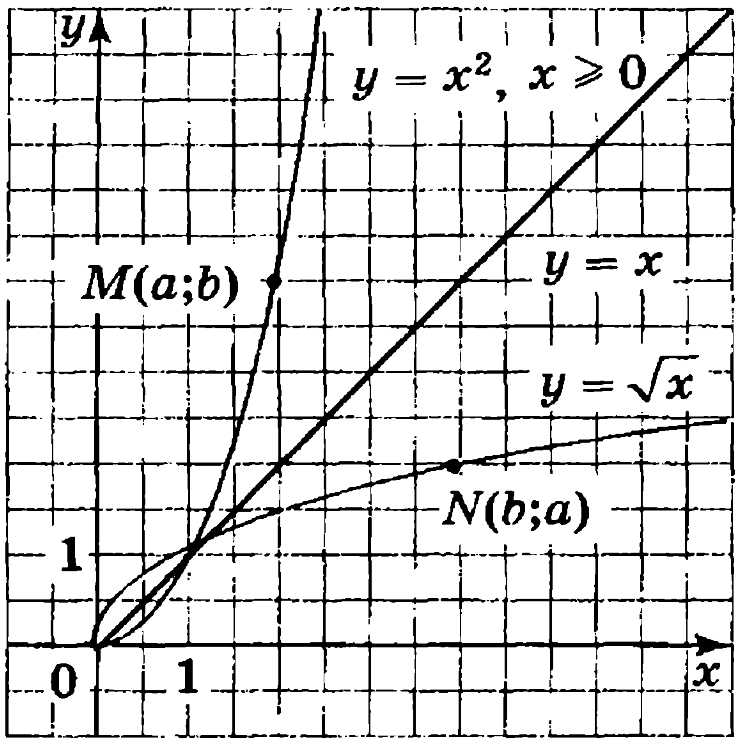


Рис. 18

тельное число, поэтому $a = \sqrt{b}$. Значит, при подстановке координат точки $N(b;\ a)$ в формулу $y = \sqrt{x}$ получается верное равенство, т. е. точка $N(b;\ a)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. Верно и обратное: если некоторая точка принадлежит второму графику, то точка, у которой координатами являются те же числа, но взятые в другом порядке, принадлежит первому графику.

Таким образом, каждой точке $M(a;\ b)$ графика функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, соответствует точка $N(b;\ a)$ графика функции $y = \sqrt{x}$ и наоборот. Так как точки $M(a;\ b)$ и $N(b;\ a)$ симметричны относительно прямой $y = x$, то и сами графики симметричны относительно этой прямой. ○

Упражнения

352. Площадь круга может быть вычислена по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, или по формуле $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где d — диаметр круга. Задайте формулой зависимость:

а) r от S; б) d от S.

353. Задайте формулой зависимость:

а) площади поверхности куба S от длины его ребра a;

б) длины ребра куба a от площади его поверхности S.

354. Площадь поверхности шара радиуса R вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$. Задайте формулой зависимость R от S.

355. Пользуясь графиком функции $y = \sqrt{x}$, найдите:

а) значение $\sqrt{x}$ при $x = 2{,}5;\ 5{,}5;\ 8{,}4$;

б) значение x, которому соответствует $\sqrt{x} = 1{,}2;\ 1{,}7;\ 2{,}5$.

356. С помощью графика функции $y = \sqrt{x}$ найдите:

а) значение функции при $x = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 6{,}5;\ 7{,}2$;

б) значение аргумента, которому соответствует значение $y = 0{,}5;\ 1{,}5;\ 1{,}8;\ 2{,}3$.

357. Принадлежит ли графику функции $y = \sqrt{x}$ точка $A(64;\ 8)$? точка $B(10\,000;\ 100)$? точка $C(-81;\ 9)$? точка $D(25;\ -5)$?

358. Пересекает ли график функции $y = \sqrt{x}$ прямая:

а) $y = 1$; б) $y = 10$; в) $y = 100$; г) $y = -100$?

Если пересекает, то в какой точке?

359. Докажите, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 0,5$ не имеют общих точек.

360. Имеют ли общие точки графики функций:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = x$;

б) $y = \sqrt{x}$ и $y = 1000$;

в) $y = \sqrt{x}$ и $y = x + 10$;

г) $y = \sqrt{x}$ и $y = -x + 1,5$?

При положительном ответе укажите координаты этих точек.

361. Какой из графиков линейных функций не пересекает графика функции $y = \sqrt{x}$?

1. $y = -x + 2$ 2. $y = -x + 0,1$ 3. $y = -x$ 4. $y = -x - 0,1$

362. Решите графически уравнение:

а) $\sqrt{x} = 6 - x$; б) $\sqrt{x} = \frac{4}{x}$.

363. Что больше:

а) $\sqrt{10}$ или $\sqrt{11}$;

б) $\sqrt{0,12}$ или $\sqrt{0,15}$;

в) $\sqrt{50}$ или $\sqrt{60}$;

г) 7 или $\sqrt{50}$;

д) $\sqrt{60}$ или 8;

е) $\sqrt{2}$ или 1,4?

364. Сравните числа:

а) $\sqrt{27}$ и $\sqrt{28}$;

б) $\sqrt{1,3}$ и $\sqrt{1,5}$;

в) $\sqrt{7}$ и 3;

г) $\sqrt{6,25}$ и 2,5;

д) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $\sqrt{\frac{1}{6}}$.

365. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{2,3}$, $\sqrt{10,4}$ и $\sqrt{19,5}$;

б) $\sqrt{18}$, $\sqrt{12}$ и 4;

в) 0,5, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt{\frac{1}{3}}$;

г) $\sqrt{0,7}$, $\sqrt{1,7}$ и 1.

П

366. Найдите значение выражения:

а) $0,5\sqrt{121} + 3\sqrt{0,81}$;

б) $\sqrt{144} \cdot \sqrt{900} \cdot \sqrt{0,01}$;

в) $\sqrt{400} - (4\sqrt{0,5})^2$;

г) $\left(-3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 10\sqrt{0,64}$.

367. Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt{(-9)^2}$; б) $(\sqrt{-9})^2$; в) $-\sqrt{9^2}$; г) $-\sqrt{(-9)^2}$?

368. Решите уравнения:

а) $x^2 = 11$ и $\sqrt{x} = 11$; б) $2x^2 = \frac{1}{2}$ и $2\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

Контрольные вопросы

1 Сформулируйте определение арифметического квадратного корня. При каких значениях a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?

2 Имеет ли уравнение $x^2 = a$ корни при $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$ и если имеет, то сколько?

3 Покажите на примере, как извлекается квадратный корень с помощью калькулятора.

4 Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$? Как расположен график этой функции в координатной плоскости?

§ 6 СВОЙСТВА АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

16. Квадратный корень из произведения и дроби

Сравним значения выражений $\sqrt{81 \cdot 4}$ и $\sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$:

$$\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{324} = 18, \quad \sqrt{81} \cdot \sqrt{4} = 9 \cdot 2 = 18.$$

Мы видим, что $\sqrt{81 \cdot 4} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{4}$. Аналогичным свойством обладает корень из произведения любых двух неотрицательных чисел.

ТЕОРЕМА 1

Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

● Каждое из выражений $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{ab}$ имеет смысл, так как $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Покажем, что выполняются два условия:

$$1)\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0; \qquad 2)\ (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = ab.$$

Так как выражения $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ принимают лишь неотрицательные значения, то произведение $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно.

Используя свойство степени произведения, получим

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Мы показали, что условия 1 и 2 выполняются. Значит, по определению арифметического квадратного корня при любых неотрицательных значениях a и b верно равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}. \circ$$

Доказанная теорема распространяется на случай, когда число множителей под знаком корня больше двух.

Например, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$. Действительно, $\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Таким образом, арифметический квадратный корень обладает следующим свойством:

корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

Рассмотрим теперь арифметический квадратный корень из дроби.

ТЕОРЕМА 2

Если $a \geqslant 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Проведите доказательство самостоятельно.

Итак, справедливо еще одно свойство арифметического квадратного корня:

корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

Пример 1. Найдем значение выражения $\sqrt{64 \cdot 0{,}04}$.

▶ Воспользуемся теоремой о корне из произведения:

$$\sqrt{64 \cdot 0{,}04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}04} = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6. \ \triangleleft$$

Пример 2. Вычислим значение выражения $\sqrt{32 \cdot 98}$.

▶ Представим подкоренное выражение в виде произведения множителей, каждый из которых является квадратом целого числа, и применим теорему о корне из произведения:

$$\sqrt{32 \cdot 98} = \sqrt{(16 \cdot 2) \cdot (49 \cdot 2)} = \sqrt{16 \cdot 49 \cdot 4} = 4 \cdot 7 \cdot 2 = 56. \ \triangleleft$$

Пример 3. Найдем значение выражения $\sqrt{\frac{36}{169}}$.

▶ По теореме о корне из дроби имеем

$$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}. \ \triangleleft$$

Поменяв в тождествах $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ местами их левые и правые части, получим

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Этими тождествами пользуются при умножении и делении арифметических квадратных корней.

Пример 4. Найдем значение произведения $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5}$.

▶ Имеем $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$. ◁

Пример 5. Найдем значение частного $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$.

▶ Имеем $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$. ◁

Упражнения

369. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{100 \cdot 49}$; в) $\sqrt{64 \cdot 121}$; д) $\sqrt{0{,}01 \cdot 169}$;

б) $\sqrt{81 \cdot 400}$; г) $\sqrt{144 \cdot 0{,}25}$; е) $\sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}04}$.

370. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{36}{25}}$; в) $\sqrt{\frac{121}{25}}$; г) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; д) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; е) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$.

371. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{81 \cdot 900}$; б) $\sqrt{0{,}36 \cdot 49}$; в) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

372. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{9 \cdot 64 \cdot 0{,}25}$; в) $\sqrt{\frac{25}{81} \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{196}{9}}$;

б) $\sqrt{1{,}21 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}0001}$; г) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 2\frac{34}{81}}$.

373. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{0{,}04 \cdot 81 \cdot 25}$; б) $\sqrt{0{,}09 \cdot 16 \cdot 0{,}04}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{121}{144} \cdot 2\frac{1}{4}}$.

374. Вычислите значение корня:

а) $\sqrt{810 \cdot 40}$; в) $\sqrt{72 \cdot 32}$; д) $\sqrt{50 \cdot 18}$; ж) $\sqrt{90 \cdot 6{,}4}$;

б) $\sqrt{10 \cdot 250}$; г) $\sqrt{8 \cdot 98}$; е) $\sqrt{2{,}5 \cdot 14{,}4}$; з) $\sqrt{16{,}9 \cdot 0{,}4}$.

375. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{75 \cdot 48}$; б) $\sqrt{45 \cdot 80}$; в) $\sqrt{4{,}9 \cdot 360}$; г) $\sqrt{160 \cdot 6{,}4}$.

376. Вычислите значение выражения:

а) $\sqrt{13^2 - 12^2}$; в) $\sqrt{313^2 - 312^2}$; д) $\sqrt{45{,}8^2 - 44{,}2^2}$;

б) $\sqrt{8^2 + 6^2}$; г) $\sqrt{122^2 - 22^2}$; е) $\sqrt{21{,}8^2 - 18{,}2^2}$.

377. Извлеките корень:

а) $\sqrt{17^2 - 8^2}$; в) $\sqrt{82^2 - 18^2}$; д) $\sqrt{6{,}8^2 - 3{,}2^2}$;

б) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; г) $\sqrt{117^2 - 108^2}$; е) $\sqrt{\left(1\frac{1}{16}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$.

378. Представьте выражение в виде произведения корней:

а) $\sqrt{15}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{7a}$; г) $\sqrt{3c}$.

379. Представьте выражение в виде частного корней:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{10}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; г) $\sqrt{\frac{b}{3}}$.

380. Докажите, что при любом неотрицательном a:

а) $10\sqrt{\frac{a}{100}} = \sqrt{a}$; б) $\sqrt{a} = \frac{1}{10}\sqrt{100a}$.

$\boxed{\textbf{381.}}$ Укажите натуральные значения n, при которых $\sqrt{n^2 - 75}$ является натуральным числом.

382. Используя приближенное равенство $\sqrt{75} \approx 8{,}7$, найдите приближенное значение выражения:

а) $\sqrt{7500}$; б) $\sqrt{750\,000}$; в) $\sqrt{0{,}75}$; г) $\sqrt{0{,}0075}$.

383. Используя свойства квадратного корня, найдите с помощью таблицы квадратов, помещенной на форзаце учебника, значение выражения:

а) $\sqrt{57\,600}$; в) $\sqrt{152\,100}$; д) $\sqrt{20{,}25}$; ж) $\sqrt{0{,}0484}$;

б) $\sqrt{230\,400}$; г) $\sqrt{129\,600}$; е) $\sqrt{9{,}61}$; з) $\sqrt{0{,}3364}$.

384. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{44\,100}$; б) $\sqrt{435\,600}$; в) $\sqrt{0{,}0729}$; г) $\sqrt{15{,}21}$.

385. Найдите значение произведения:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$; в) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{7}$; д) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$; ж) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{4{,}5}$;

б) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; е) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$; з) $\sqrt{1{,}2} \cdot \sqrt{3\frac{1}{3}}$.

386. Найдите значение частного:

а) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; б) $\dfrac{\sqrt{23}}{\sqrt{2300}}$; в) $\dfrac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$; г) $\dfrac{\sqrt{12\,500}}{\sqrt{500}}$; д) $\dfrac{\sqrt{7{,}5}}{\sqrt{0{,}3}}$.

387. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$; в) $\sqrt{162} \cdot \sqrt{2}$; д) $\sqrt{110} \cdot \sqrt{4{,}4}$; ж) $\dfrac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$;

б) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; г) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}$; е) $\sqrt{1\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{0{,}2}$; з) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{735}}$.

388. Значение выражения $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ с помощью калькулятора можно вычислить двумя способами: найти значения $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ и результаты перемножить или заменить произведение $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ выражением $\sqrt{6}$ и затем найти его значение. Каким из этих способов удобнее пользоваться? Выполните вычисления.

П

389. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2}$, если $x = -4; -3; 0; 9; 20$. При каких значениях x выражение $\sqrt{x^2}$ имеет смысл?

390. Представьте в виде квадрата некоторого выражения:

а) a^4; б) a^6; в) a^{18}; г) $\dfrac{1}{a^{10}}$; д) a^2b^8; е) $\dfrac{a^6}{b^{12}}$.

391. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат со стороной a см, высота параллелепипеда равна b см, а его объем равен V см^3. Выразите переменную a через b и V.

392. Решите уравнение:

а) $\frac{2x}{5} - \frac{x+18}{6} = 23 + \frac{x}{30}$; б) $\frac{x-1}{3} + \frac{2x+1}{5} = \frac{3x-1}{4}$.

17. Квадратный корень из степени

Найдем значение выражения $\sqrt{x^2}$ при $x = 5$ и при $x = -6$:

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

В каждом из рассмотренных примеров корень из квадрата числа равен модулю этого числа:

$$\sqrt{5^2} = |5|, \qquad \sqrt{(-6)^2} = |-6|.$$

ТЕОРЕМА

При любом значении x верно равенство

$$\sqrt{x^2} = |x|. \qquad (1)$$

● Рассмотрим два случая: $x \geqslant 0$ и $x < 0$. Если $x \geqslant 0$, то по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{x^2} = x$. Если $x < 0$, то $-x > 0$, поэтому $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$. Мы знаем, что $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Значит, при любом x значение выражения $\sqrt{x^2}$ совпадает со значением выражения $|x|$. ○

Равенство (1) является тождеством. Это тождество применяется при извлечении квадратного корня из степени с четным показателем. Чтобы извлечь корень из степени с четным показателем, достаточно представить подкоренное выражение в виде квадрата некоторого выражения и воспользоваться тождеством (1).

Пример 1. Упростим выражение $\sqrt{a^{16}}$.

▶ Представим степень a^{16} в виде $(a^8)^2$ и воспользуемся тождеством (1): $\sqrt{a^{16}} = \sqrt{(a^8)^2} = |a^8|$.

Так как $a^8 \geqslant 0$ при любом a, то $|a^8| = a^8$. Итак, $\sqrt{a^{16}} = a^8$. ◁

Пример 2. Преобразуем выражение $\sqrt{x^{10}}$, где $x < 0$.

▶ Представим x^{10} в виде $(x^5)^2$, получим

$$\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5|.$$

Так как $x < 0$, то $x^5 < 0$, поэтому $|x^5| = -x^5$.
Значит, при $x < 0$

$$\sqrt{x^{10}} = -x^5. \triangleleft$$

Пример 3. Найдем значение выражения $\sqrt{893\,025}$.

▶ Представим число 893 025 в виде произведения простых множителей, получим

$$\sqrt{893\,025} = \sqrt{3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{3^6} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} =$$
$$= \sqrt{(3^3)^2} \cdot 5 \cdot 7 = 3^3 \cdot 35 = 27 \cdot 35 = 945. \triangleleft$$

Пример 4. Упростим выражение $\sqrt{(\sqrt{7} - 12)^2} + \sqrt{7}$.

▶ Имеем $\sqrt{(\sqrt{7} - 12)^2} + \sqrt{7} = |\sqrt{7} - 12| + \sqrt{7} = 12 - \sqrt{7} + \sqrt{7} = 12.$ $\triangleleft$

Упражнения

393. Вычислите:

а) $\sqrt{(0,1)^2}$; г) $\sqrt{(1,7)^2}$; ж) $2\sqrt{(-23)^2}$;
б) $\sqrt{(-0,4)^2}$; д) $\sqrt{(-19)^2}$; з) $5\sqrt{52^2}$;
в) $\sqrt{(-0,8)^2}$; е) $\sqrt{24^2}$; и) $0,2\sqrt{(-61)^2}$.

394. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{x^2}$ при $x = 22; -35; -1\frac{2}{3}; 0$;
б) $2\sqrt{a^2}$ при $a = -7; 12$;
в) $0,1\sqrt{y^2}$ при $y = -15; 27$.

395. Замените выражение тождественно равным:

а) $\sqrt{p^2}$; б) $\sqrt{y^2}$; в) $3\sqrt{b^2}$; г) $-0,2\sqrt{x^2}$; д) $\sqrt{25a^2}$.

396. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, если $a > 0$; д) $\sqrt{36x^2}$, если $x \leqslant 0$;
б) $\sqrt{n^2}$, если $n < 0$; е) $-\sqrt{9y^2}$, если $y < 0$;
в) $3\sqrt{c^2}$, если $c \geqslant 0$; ж) $-5\sqrt{4x^2}$, если $x \geqslant 0$;
г) $-5\sqrt{y^2}$, если $y > 0$; з) $0,5\sqrt{16a^2}$, если $a < 0$.

397. Упростите выражение $\sqrt{a^2 - 4a + 4}$, зная, что:

а) $0 \leqslant a < 2$; б) $a \geqslant 2$.

398. Упростите выражение $\sqrt{9 - 6\sqrt{x} + x}$ и найдите его значение при x, равном:

а) 2,89; б) 82,81.

399. Верно ли равенство:

а) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1$; б) $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = 2 - \sqrt{5}$?

400. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$.

401. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{2^4}$; в) $\sqrt{2^6}$; д) $\sqrt{(-5)^4}$; ж) $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$;

б) $\sqrt{3^4}$; г) $\sqrt{10^8}$; е) $\sqrt{(-2)^8}$; з) $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$.

402. Вычислите:

а) $\sqrt{11^4}$; в) $\sqrt{(-3)^8}$; д) $\sqrt{2^8 \cdot 3^2}$; ж) $\sqrt{7^2 \cdot 2^8}$;

б) $\sqrt{4^6}$; г) $\sqrt{(-6)^4}$; е) $\sqrt{3^4 \cdot 5^6}$; з) $\sqrt{3^6 \cdot 5^4}$.

403. Извлеките корень, представив подкоренное выражение в виде произведения простых множителей:

а) $\sqrt{20\,736}$; б) $\sqrt{50\,625}$; в) $\sqrt{28\,224}$; г) $\sqrt{680\,625}$.

404. Вычислите:

а) $\sqrt{2304}$; б) $\sqrt{18\,225}$; в) $\sqrt{254\,016}$.

405. На рисунке 19 изображены графики функций $y = 2x + 2$, $y = -\dfrac{x}{4} - 3$ и $y = -2x + 2$. Для каждой функции укажите ее график.

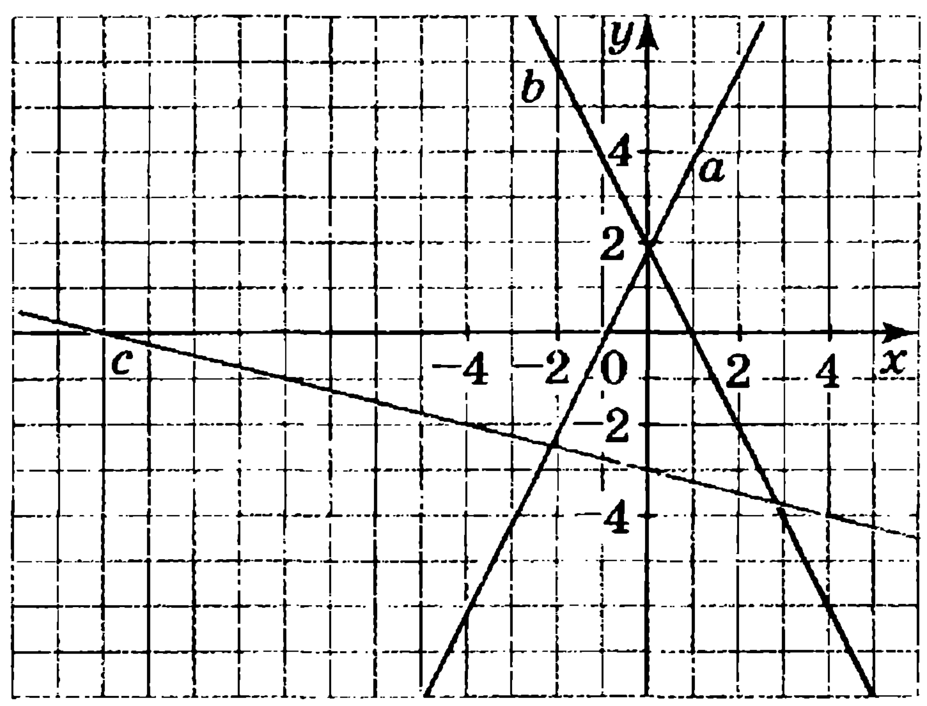


Рис. 19

406. Объем цилиндра вычисляется по формуле $V = \pi R^2 H$, где R — радиус основания, H — высота цилиндра. Выразите переменную R через V и H.

Контрольные вопросы

Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из произведения.

Сформулируйте и докажите теорему о квадратном корне из дроби.

Докажите тождество $\sqrt{x^2} = |x|$.

Покажите на примере выражения $\sqrt{a^{12}}$, как извлекается квадратный корень из степени с четным показателем.

§ 7 ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КВАДРАТНОГО КОРНЯ

18. Вынесение множителя за знак корня. Внесение множителя под знак корня

Сравним значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$. Чтобы решить эту задачу, преобразуем $\sqrt{50}$. Представим число 50 в виде произведения $25 \cdot 2$ и применим теорему о корне из произведения. Получим

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

Так как $5\sqrt{2} < 6\sqrt{2}$, то $\sqrt{50} < 6\sqrt{2}$.

При решении задачи мы заменили $\sqrt{50}$ произведением чисел 5 и $\sqrt{2}$. Такое преобразование называют *вынесением множителя за знак корня.*

Значения выражений $\sqrt{50}$ и $6\sqrt{2}$ можно сравнить иначе, представив произведение $6\sqrt{2}$ в виде арифметического квадратного корня. Для этого число 6 заменим $\sqrt{36}$ и выполним умножение корней.

Получим

$$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{72}.$$

Так как $50 < 72$, то $\sqrt{50} < \sqrt{72}$. Значит,

$$\sqrt{50} < 6\sqrt{2}.$$

При решении задачи вторым способом мы заменили $6\sqrt{2}$ выражением $\sqrt{72}$. Такое преобразование называют *внесением множителя под знак корня.*

Пример 1. Вынесем множитель за знак корня в выражении $\sqrt{a^7}$.

▶ Выражение $\sqrt{a^7}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$, так как если $a < 0$, то $a^7 < 0$. Представим подкоренное выражение a^7 в виде произведения $a^6 \cdot a$, в котором множитель a^6 является степенью с четным показателем. Тогда

$$\sqrt{a^7} = \sqrt{a^6 \cdot a} = \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{(a^3)^2} \cdot \sqrt{a} = |a^3| \cdot \sqrt{a} = a^3\sqrt{a}. \ \triangleleft$$

Пример 2. Внесем множитель под знак корня в выражении $-4\sqrt{x}$.

▶ Отрицательный множитель -4 нельзя представить в виде арифметического квадратного корня и поэтому множитель -4 нельзя внести под знак корня. Однако выражение $-4\sqrt{x}$ можно преобразовать, внеся под знак корня положительный множитель 4:

$$-4\sqrt{x} = -1 \cdot 4\sqrt{x} = -1 \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{x} = -\sqrt{16x}. \ \triangleleft$$

Пример 3. Внесем множитель под знак корня в выражении $a\sqrt{2}$.

▶ Множитель a может быть любым числом (положительным, нулем или отрицательным). Поэтому рассмотрим два случая:

если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{2} = |a|\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$;

если $a < 0$, то $a\sqrt{2} = -|a|\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$. $\triangleleft$

Упражнения

407. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{12}$; в) $\sqrt{80}$; д) $\sqrt{125}$; ж) $\sqrt{363}$;

б) $\sqrt{18}$; г) $\sqrt{48}$; е) $\sqrt{108}$; з) $\sqrt{845}$.

408. Вынесите множитель за знак корня и упростите полученное выражение:

а) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$; в) $-\frac{1}{7}\sqrt{147}$; д) $0{,}1\sqrt{20\,000}$;

б) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; г) $-\frac{1}{5}\sqrt{275}$; е) $-0{,}05\sqrt{28\,800}$.

409. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{20}$; в) $\sqrt{200}$; д) $0{,}2\sqrt{75}$; ж) $-0{,}125\sqrt{192}$;

б) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{160}$; е) $0{,}7\sqrt{300}$; з) $-\frac{1}{3}\sqrt{450}$.

410. Внесите множитель под знак корня:

а) $7\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $6\sqrt{x}$; г) $10\sqrt{y}$; д) $3\sqrt{2a}$; е) $5\sqrt{3b}$.

411. Какое из выражений не имеет смысла?

1. $\sqrt{2\sqrt{17}-4}$ 2. $\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ 3. $\sqrt{6\sqrt{3}-7\sqrt{2}}$ 4. $\sqrt{8\sqrt{3}-14}$

412. Представьте выражение в виде арифметического квадратного корня или выражения, ему противоположного:

а) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$; д) $5\sqrt{\frac{a}{5}}$;

б) $2\sqrt{\frac{3}{4}}$; г) $-10\sqrt{0{,}02}$; е) $-\frac{1}{2}\sqrt{12x}$.

413. Замените выражение арифметическим квадратным корнем или выражением, ему противоположным:

а) $2\sqrt{2}$; в) $-7\sqrt{3}$; д) $\frac{1}{3}\sqrt{18b}$;

б) $5\sqrt{y}$; г) $-6\sqrt{2a}$; е) $-0{,}1\sqrt{200c}$.

414. Сравните значения выражений:

а) $3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{20}$ и $3\sqrt{5}$; в) $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$ и $3\sqrt{2}$.

415. Сравните значения выражений:

а) $\frac{1}{3}\sqrt{351}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{188}$; в) $\sqrt{24}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{216}$;

б) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ и $\frac{1}{5}\sqrt{150}$; г) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$ и $7\sqrt{\frac{2}{3}}$.

416. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $\sqrt{29}$, $4\sqrt{2}$;

б) $6\sqrt{2}$, $\sqrt{58}$, $3\sqrt{7}$, $2\sqrt{14}$.

417. Сравните:

а) $2\sqrt{7}$ и $7\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{120}$ и $2\sqrt{270}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ и $6\sqrt{\frac{1}{2}}$.

П

418. Упростите выражение

$$\left(\frac{2x+1}{x^2-3x}-\frac{2x-1}{x^2+3x}\right)\cdot\frac{x^2-9}{7x}+1.$$

419. В школьной мастерской учащиеся за три дня переплели 144 книги. Сколько книг было переплетено в каждый из трех дней, если известно, что во второй день учащиеся переплели на 12 книг больше, чем в первый, а в третий — $\frac{5}{7}$ числа книг, переплетенных в первый и во второй дни вместе?

420. Решите уравнение:

а) $\frac{4x - 1}{12} + \frac{7}{4} = \frac{5 - x}{9}$;

б) $\frac{2x - 9}{6} - \frac{2(5x + 3)}{15} = \frac{1}{2}$.

19. Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Мы рассмотрели ряд тождественных преобразований выражений, содержащих квадратные корни. К ним относятся преобразования корней из произведения, дроби и степени, умножение и деление корней, вынесение множителя за знак корня, внесение множителя под знак корня. Рассмотрим другие примеры тождественных преобразований выражений, содержащих квадратные корни.

Пример 1. Упростим выражение $3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a}$.

▶ Вынесем за знак корня в выражении $\sqrt{20a}$ число 2, а в выражении $\sqrt{45a}$ число 3. Получим

$$3\sqrt{5a} - \sqrt{20a} + 4\sqrt{45a} = 3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a} =$$
$$= \sqrt{5a}(3 - 2 + 12) = 13\sqrt{5a}. \triangleleft$$

Заменив сумму $3\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a} + 12\sqrt{5a}$ выражением $13\sqrt{5a}$, мы выполнили приведение подобных слагаемых. Запись можно вести короче, не выписывая промежуточный результат.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$.

▶ Так как $3 = (\sqrt{3})^2$, то числитель данной дроби можно представить в виде разности квадратов двух выражений. Поэтому

$$\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}} = \frac{x^2 - (\sqrt{3})^2}{x + \sqrt{3}} = \frac{(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})}{x + \sqrt{3}} = x - \sqrt{3}. \triangleleft$$

Пример 3. Преобразуем дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ так, чтобы знаменатель не содержал квадратного корня.

▶ Умножив числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{c\sqrt{2}}{2}. \ \triangleleft$$

Мы заменили дробь $\frac{c}{\sqrt{2}}$ тождественно равной дробью $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, не содержащей в знаменателе знака корня. В таких случаях говорят, что мы *освободились от иррациональности* в знаменателе дроби.

Пример 4. Найдем с помощью калькулятора приближенное значение выражения $\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ с двумя знаками после запятой.

▶ Вычисления будут проще, если предварительно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби. Для этого умножим числитель и знаменатель данной дроби на сумму $\sqrt{6}+1$. Получим

$$\frac{4-3\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} = \frac{(4-3\sqrt{6})(\sqrt{6}+1)}{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)} = \frac{4\sqrt{6}-3(\sqrt{6})^2+4-3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}-3\cdot 6+4}{6-1} = \frac{\sqrt{6}-14}{5}.$$

Проведя вычисления, найдем, что

$$\frac{\sqrt{6}-14}{5} \approx -2{,}31. \ \triangleleft$$

Упражнения

421. Упростите выражение:

а) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$;

б) $3\sqrt{8}-\sqrt{50}+2\sqrt{18}$;

в) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$;

г) $\sqrt{75}-0{,}1\sqrt{300}-\sqrt{27}$;

д) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0{,}5\sqrt{8}$.

422. Упростите выражение:

а) $\sqrt{8p}-\sqrt{2p}+\sqrt{18p}$;

б) $\sqrt{160c}+2\sqrt{40c}-3\sqrt{90c}$;

в) $5\sqrt{27m}-4\sqrt{48m}-2\sqrt{12m}$;

г) $\sqrt{54}-\sqrt{24}+\sqrt{150}$;

д) $3\sqrt{2}+\sqrt{32}-\sqrt{200}$;

е) $2\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$.

423. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения:

а) $(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})$;
б) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$;
в) $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)$;
г) $(\sqrt{10}+\sqrt{7})(\sqrt{7}-\sqrt{10})$;
д) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$;
е) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2$;
ж) $(\sqrt{2}+3)^2$;
з) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$.

424. Выполните действия:

а) $(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)$;
б) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$;
в) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$;
г) $(1+3\sqrt{5})^2$;
д) $(2\sqrt{3}-7)^2$;
е) $(2\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

425. Выполните действия:

а) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$;
б) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$.

426. Преобразуйте выражение:

а) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$;
б) $(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$;
в) $(\sqrt{m}+\sqrt{2})^2$;
г) $(\sqrt{3}-\sqrt{x})^2$;
д) $(5\sqrt{7}-13)(5\sqrt{7}+13)$;
е) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})$;
ж) $(6-\sqrt{2})^2+3\sqrt{32}$;
з) $(\sqrt{2}+\sqrt{18})^2-30$.

427. Разложите на множители, используя формулу разности квадратов:

а) x^2-7;
б) $5-c^2$;
в) $4a^2-3$;
г) $11-16b^2$;
д) $y-3$, где $y\geqslant 0$;
е) $x-y$, где $x>0$ и $y>0$.

428. Разложите на множители выражение:

а) $3+\sqrt{3}$;
б) $10-2\sqrt{10}$;
в) $\sqrt{x}+x$;
г) $a-5\sqrt{a}$;
д) $\sqrt{a}-\sqrt{2a}$;
е) $\sqrt{3m}+\sqrt{5m}$;
ж) $\sqrt{14}-\sqrt{7}$;
з) $\sqrt{33}+\sqrt{22}$.

429. Сократите дробь:

а) $\dfrac{b^2-5}{b-\sqrt{5}}$;
б) $\dfrac{m+\sqrt{6}}{6-m^2}$;
в) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;
г) $\dfrac{b-9}{\sqrt{b}+3}$;
д) $\dfrac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$;
е) $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4x-9y}$.

4 Алгебра 8 кл.

430. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{x}-5}{25-x}$; д) $\dfrac{5+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}$;

б) $\dfrac{\sqrt{5}-a}{5-a^2}$; г) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$.

431. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x}{\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{a}{b\sqrt{b}}$; ж) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{3}{\sqrt{b}}$; д) $\dfrac{4}{\sqrt{a+b}}$; з) $\dfrac{8}{3\sqrt{2}}$;

в) $\dfrac{2}{7\sqrt{y}}$; е) $\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}$; и) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}}$.

432. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{m}{\sqrt{x}}$; в) $\dfrac{3}{5\sqrt{c}}$; д) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$; е) $\dfrac{5}{4\sqrt{15}}$.

433. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+1}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; д) $\dfrac{33}{7-3\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; е) $\dfrac{15}{2\sqrt{5}+5}$.

434. Докажите, что значение выражения:

а) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}-4}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}+4}$ есть число рациональное;

б) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}-\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$ есть число иррациональное.

435. Найдите с помощью калькулятора приближенное значение выражения с точностью до 0,01:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$; в) $\dfrac{3}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}$;

б) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{5+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$.

436. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{x}{x+\sqrt{y}}$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{9}{3-2\sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{b}{a-\sqrt{b}}$; г) $\dfrac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; е) $\dfrac{14}{1+5\sqrt{2}}$.

437. Докажите, что:

а) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}=0,2\sqrt{15}$; б) $\sqrt{\dfrac{2}{a}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{2a}$.

438. Докажите, что числа $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$ являются взаимно обратными, а числа $2\sqrt{6}-5$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{6}+5}$ — противоположными.

439. Среди чисел $15\sqrt{3}-4\sqrt{2}$, $6-\sqrt{12}$, $\sqrt{80}-5\sqrt{3}$, $\sqrt{75}-4\sqrt{5}$, $\dfrac{1}{2\sqrt{3}-6}$, $\dfrac{1}{\sqrt{675}-\sqrt{32}}$ есть пара взаимно обратных чисел и пара противоположных чисел. Найдите эти пары.

440. Упростите выражение $\dfrac{9-x^2}{4x}\cdot\dfrac{8x}{x^2+6x+9}-2$ и найдите его значение при $x=-2,5$.

441. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x-1}{2}+\dfrac{2-x}{3}+1=0$;

б) $\dfrac{y-10}{6}-\dfrac{5-2y}{4}=2,5$.

442. Площадь кольца вычисляется по формуле $S=\pi(R^2-r^2)$, где R — радиус внешнего круга, а r — радиус внутреннего круга. Выразите R через S и r.

443. Напишите для каждой прямой, изображенной на рисунке 20, уравнение, графиком которого является эта прямая.

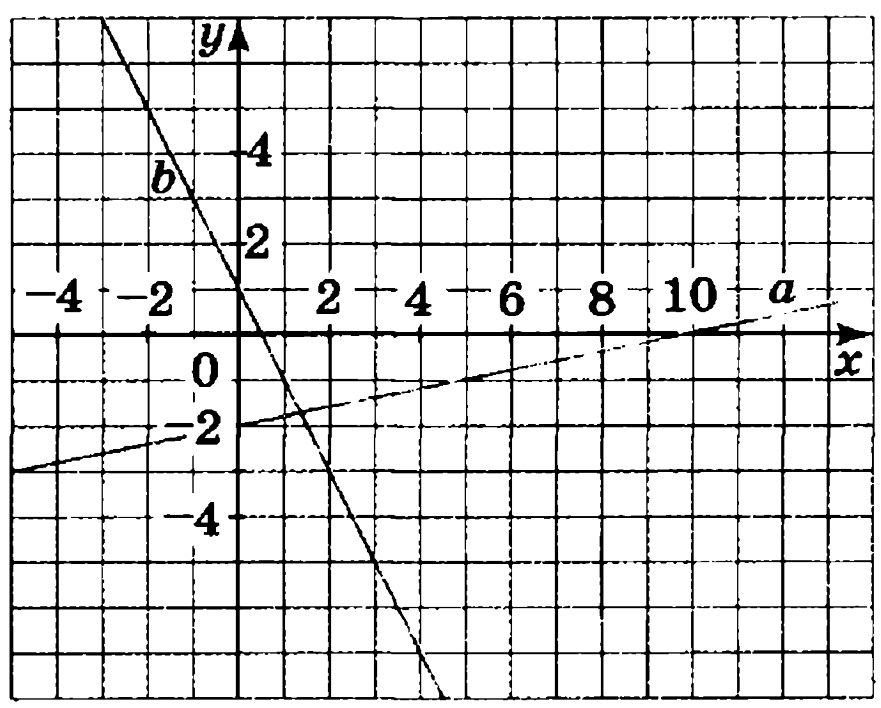


Рис. 20

Контрольные вопросы

На примере выражения $3\sqrt{a}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

На примере выражения $\sqrt{8a}$ покажите, как можно вынести множитель за знак корня.

На примере выражений $\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ покажите, как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Для тех, кто хочет знать больше

20. Преобразование двойных радикалов

Сторона a_5 правильного пятиугольника, вписанного в круг радиуса R, вычисляется по формуле $a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Выражение $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, входящее в эту формулу, имеет вид $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, где a, b, c — некоторые рациональные числа. Выражение такого вида называют *двойным радикалом.*

В преобразованиях выражений, содержащих двойные радикалы, стремятся освободиться от внешнего радикала. Это нетрудно сделать, когда выражение, стоящее под знаком радикала, можно представить в виде квадрата суммы или квадрата разности.

Пример 1. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{41-12\sqrt{5}}$.

▶ Попытаемся представить выражение $41-12\sqrt{5}$ в виде квадрата разности двух выражений. Для этого $12\sqrt{5}$ будем рассматривать как удвоенное произведение двух выражений, а 41 как сумму их квадратов. Выражение $12\sqrt{5}$ можно представить, например, как $2\cdot 6\cdot\sqrt{5}$ или как $2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}$. Проверка убеждает нас, что именно в первом случае сумма квадратов множителей 6 и $\sqrt{5}$ равна 41. Значит,

$$\sqrt{41-12\sqrt{5}} = \sqrt{36-2\cdot 6\cdot\sqrt{5}+5} = \sqrt{(6-\sqrt{5})^2} = |6-\sqrt{5}| = 6-\sqrt{5}. \ \triangleleft$$

Пример 2. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{61+28\sqrt{3}}$.

Покажем, как можно решить эту задачу, используя *метод неопределенных коэффициентов.*

▶ Пусть $\sqrt{61+28\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$, где a и b — некоторые числа. Тогда $(a+b\sqrt{3})^2 = 61 + 28\sqrt{3}$ и $a + b\sqrt{3} \geqslant 0$. Значит,

$$a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2 = 61 + 28\sqrt{3}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} a^2 + 3b^2 = 61, \\ 2ab = 28, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a^2 + 3b^2 = 61, \\ ab = 14. \end{cases}$$

Выпишем все пары целых чисел $(a; b)$, для которых $ab = 14$:

$(-14; -1)$, $(-7; -2)$, $(-2; -7)$, $(-1; -14)$, $(1; 14)$, $(2; 7)$, $(7; 2)$, $(14; 1)$.

Из этих пар выберем те, которые удовлетворяют условиям

$$a^2 + 3b^2 = 61 \quad \text{и} \quad a + b\sqrt{3} \geqslant 0.$$

Нетрудно убедиться, что такая пара единственная — это пара $(7; 2)$. Значит,

$$\sqrt{61+28\sqrt{3}} = 7 + 2\sqrt{3}. \ \triangleleft$$

В тех случаях, когда $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и разность $a^2 - b$ равна квадрату рационального числа, освободиться от внешнего радикала в выражении $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ можно с помощью *формулы двойного радикала:*

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

В правой части этой формулы записано неотрицательное число. Покажем, что его квадрат равен $a \pm \sqrt{b}$:

$$\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \pm \frac{2\sqrt{a^2 - (a^2 - b)}}{2} + \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} = a \pm \sqrt{b}.$$

Пример 3. Освободимся от внешнего радикала в выражении $\sqrt{57 - \sqrt{2024}}$.

▶ По формуле двойного радикала имеем

$$\sqrt{57 - \sqrt{2024}} = \sqrt{\frac{57 + \sqrt{57^2 - 2024}}{2}} - \sqrt{\frac{57 - \sqrt{57^2 - 2024}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{57 + \sqrt{1225}}{2}} - \sqrt{\frac{57 - \sqrt{1225}}{2}} = \sqrt{\frac{57 + 35}{2}} - \sqrt{\frac{57 - 35}{2}} = \sqrt{46} - \sqrt{11}.$$

Освобождение от внешнего радикала используется в преобразованиях выражений с переменными, содержащих двойные радикалы.

Пример 4. Упростим выражение

$$\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-4}}+\sqrt{a-2},\text{ где } a>2.$$

▶ Представим в двойном радикале подкоренное выражение в виде

$$(a+2)-2\sqrt{a^2-4}+(a-2).$$

Получим

$$\sqrt{(a+2)-2\sqrt{a^2-4}+(a-2)}+\sqrt{a-2}=\sqrt{(\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2})^2}+\sqrt{a-2}=$$
$$=|\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}|+\sqrt{a-2}=\sqrt{a+2}-\sqrt{a-2}+\sqrt{a-2}=\sqrt{a+2}.$$ ◁

Упражнения

444. Освободитесь от внешнего радикала, представив подкоренное выражение в виде квадрата:

а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

445. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{27-5\sqrt{8}}+\sqrt{2}$.

446. Освободитесь от внешнего радикала, пользуясь формулой двойного радикала:

а) $\sqrt{55+\sqrt{216}}$; б) $\sqrt{86-\sqrt{5460}}$.

447. Упростите выражение, вычислив предварительно значение a^2, если:

а) $a=\sqrt{11+\sqrt{85}}-\sqrt{11-\sqrt{85}}$;

б) $a=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

448. Является ли рациональным или иррациональным числом значение выражения:

а) $\sqrt{13+4\sqrt{3}}-\sqrt{13-4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{19-2\sqrt{34}}+\sqrt{19+2\sqrt{34}}$?

449. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{11}}}{\sqrt{4+\sqrt{11}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}}$.

450. Найдите значение выражения:

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

451. Докажите, что верно равенство:

а) $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{9+\sqrt{12}-\sqrt{20}-\sqrt{60}}=1+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

452. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{b+1}{2}-\sqrt{b}}-\sqrt{\dfrac{b+1}{2}+\sqrt{b}}$, где $b \geqslant 1$;

б) $\sqrt{\dfrac{c+4}{4}+\sqrt{c}}-\sqrt{\dfrac{c+4}{4}-\sqrt{c}}$, где $c \geqslant 4$.

453. Освободитесь от внешнего радикала в выражении:

а) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$, если $a \geqslant 1$;

б) $\sqrt{a+b+1+2\sqrt{a+b}}-\sqrt{a+b+1-2\sqrt{a+b}}$, если $a+b>1$.

Дополнительные упражнения к главе II

К параграфу 4

454. Известно, что числа a и b натуральные. Является ли натуральным число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\dfrac{a}{b}$?

455. Известно, что числа a и b целые. Является ли целым число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

456. Известно, что числа a и b рациональные. Является ли рациональным число:

а) $a+b$; б) $a-b$; в) ab; г) $\dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$?

457. Докажите, что если числа x и y четные, то четным будет число:
а) $x - y$; б) xy; в) $3x + y$.

458. Известно, что числа x и y нечетные. Будет ли четным или нечетным числом:
а) сумма $x + y$;
б) разность $x - y$;
в) произведение xy?

459. Назовите:
а) пять положительных чисел, меньших 0,002;
б) пять отрицательных чисел, больших $-\frac{1}{11}$;
в) пять чисел, больших $\frac{1}{3}$ и меньших $\frac{1}{2}$.

460. Представьте в виде бесконечной десятичной периодической дроби число:
а) $\frac{23}{64}$; в) $\frac{11}{13}$; д) $\frac{2}{35}$; ж) $\frac{23}{30}$;
б) $-\frac{7}{25}$; г) $\frac{1}{27}$; е) $-\frac{7}{22}$; з) $\frac{12}{55}$.

461. Назовите два рациональных и два иррациональных числа, заключенных между числами 10 и 10,1.

462. Известно, что число a рациональное, а число b иррациональное. Будет ли рациональным или иррациональным число:
а) $a + b$; б) $a - b$?

К параграфу 5

463. Найдите значение выражения:
а) $0{,}3\sqrt{289}$; в) $\sqrt{\frac{9}{49}} - 1$; д) $2\sqrt{0{,}0121} + \sqrt{100}$.
б) $-4\sqrt{0{,}81}$; г) $\frac{4}{\sqrt{256}} - \frac{1}{\sqrt{64}}$;

464. Найдите значение выражения:
а) $\sqrt{5x - 10}$ при $x = 2$; 2,2; 5,2; 22;
б) $\sqrt{6 - 2y}$ при $y = 1$; $-1{,}5$; -15; $-37{,}5$;
в) $\frac{3 + \sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$ при $x = 0$; 1; 16; 0,25;
г) $\sqrt{2a - b}$ при $a = 0$, $b = 0$; при $a = 4$, $b = 7$.

465. Решите уравнение:

а) $5\sqrt{x} = 3$; в) $\dfrac{1}{4\sqrt{x}} = 2$; д) $1 + \sqrt{2x} = 10$.

б) $\dfrac{1}{\sqrt{3x}} = 1$; г) $\sqrt{x - 5} = 4$;

466. Решите уравнение $\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} = 2$.

467. Может ли:

а) сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом;

б) произведение рационального и иррационального чисел быть рациональным числом?

468. Приведите пример уравнения вида $x^2 = a$, которое:

а) имеет два рациональных корня;

б) имеет два иррациональных корня;

в) не имеет корней.

469. Укажите допустимые значения переменной x в выражении:

а) $\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{x^2 + 1}$; д) $\sqrt{-x^2}$;

б) $\sqrt{x^4}$; г) $\sqrt{(4 - x)^2}$; е) $\sqrt{-x^3}$.

470. При каких значениях a и b имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{ab}$; б) $\sqrt{-ab}$; в) $\sqrt{a^2b}$; г) $\sqrt{a^2b^2}$; д) $\sqrt{-ab^2}$?

471. При каких значениях переменной x имеет смысл выражение:

а) $\dfrac{4}{\sqrt{x}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$; в) $\dfrac{5}{\sqrt{x} - 1}$?

472. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{0,16} + (2\sqrt{0,1})^2$; г) $(3\sqrt{3})^2 + (-3\sqrt{3})^2$;

б) $(0,2\sqrt{10})^2 + 0,5\sqrt{16}$; д) $(5\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{5})^2$;

в) $\sqrt{144} - 0,5(\sqrt{12})^2$; е) $(-3\sqrt{6})^2 - 3(\sqrt{6})^2$.

473. Расстояние между двумя точками координатной плоскости $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Вычислите расстояние между точками $A(-3,5;\ 4,3)$ и $B(7,8;\ 0,4)$ с помощью калькулятора.

474. Сравните числа:

а) $\sqrt{7,5}$ и $\sqrt{7,6}$; г) $\sqrt{2,16}$ и $\sqrt{2\frac{1}{6}}$; ж) $\sqrt{7}$ и 2,6;

б) $\sqrt{0,1}$ и $\sqrt{0,01}$; д) $\sqrt{\frac{5}{9}}$ и $\sqrt{\frac{6}{11}}$; з) 3,2 и $\sqrt{9,8}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0,3}$; е) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ и $\sqrt{0,(3)}$; и) $\sqrt{1,23}$ и 1,1.

475. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь при различных значениях b уравнение:

а) $\sqrt{x} = x + b$; б) $\sqrt{x} = -x + b$.

К параграфу 6

476. Вычислите:

а) $\sqrt{196 \cdot 0,81 \cdot 0,36}$; в) $\sqrt{0,87 \cdot 49 + 0,82 \cdot 49}$;

б) $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot 5\frac{4}{9} \cdot 0,01}$; г) $\sqrt{1,44 \cdot 1,21 - 1,44 \cdot 0,4}$.

477. Найдите значение корня:

а) $\sqrt{\dfrac{165^2 - 124^2}{164}}$; в) $\sqrt{\dfrac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$;

б) $\sqrt{\dfrac{98}{176^2 - 112^2}}$; г) $\sqrt{\dfrac{145,5^2 - 96,5^2}{193,5^2 - 31,5^2}}$.

478. Вычислите:

а) $15\sqrt{20} \cdot 0,1\sqrt{45}$; в) $\dfrac{8\sqrt{5}}{0,4\sqrt{0,2}}$;

б) $0,3\sqrt{10} \cdot 0,2\sqrt{15} \cdot 0,5\sqrt{6}$; г) $\dfrac{\sqrt{0,48}}{5\sqrt{12}}$.

479. Известно, что $a < 0$ и $b < 0$. Представьте выражение:

а) $\sqrt{ab}$ в виде произведения корней;

б) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ в виде частного корней.

480. Найдите значение выражения (если оно имеет смысл):

а) $\sqrt{(-12)^2}$; в) $\sqrt{-10^2}$; д) $\sqrt{-(-15)^2}$;

б) $-\sqrt{10^2}$; г) $-\sqrt{(-11)^2}$; е) $-\sqrt{(-25)^2}$.

481. Вычислите:

а) $3\sqrt{(-2)^6}$; г) $0{,}1\sqrt{2^{10}}$; ж) $-\sqrt{(-2)^{12}}$;

б) $-2\sqrt{10^4}$; д) $0{,}1\sqrt{(-3)^8}$; з) $2{,}5\sqrt{(-0{,}1)^4}$.

в) $-3\sqrt{5^4}$; е) $100\sqrt{0{,}1^{10}}$;

482. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4^3}$; г) $\sqrt{25^3}$; ж) $\sqrt{750 \cdot 270}$;

б) $\sqrt{9^5}$; д) $\sqrt{8 \cdot 162}$; з) $\sqrt{194 \cdot 776}$.

в) $\sqrt{16^5}$; е) $\sqrt{96 \cdot 486}$;

483. При каких значениях x верно равенство $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$?

484. При каких значениях переменной верно равенство:

а) $\sqrt{y^4} = y^2$; в) $\sqrt{x^6} = x^3$; д) $\sqrt{a^{14}} = -a^7$;

б) $\sqrt{x^{12}} = x^6$; г) $\sqrt{c^{10}} = -c^5$; е) $\sqrt{b^8} = b^4$?

485. Постройте график функции, заданной формулой:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$; б) $y = \dfrac{-2\sqrt{x^2}}{x}$; в) $y = x\sqrt{x^2}$; г) $y = -x\sqrt{x^2}$.

486. Постройте график функции $y = \sqrt{|x|}$.

487. Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt{a^4 b^4}$; д) $\sqrt{\dfrac{p^4}{a^8}}$;

б) $\sqrt{b^6 c^8}$, где $b \geqslant 0$; е) $\sqrt{\dfrac{16a^{12}}{b^{10}}}$, где $b > 0$;

в) $\sqrt{16x^4 y^{12}}$; ж) $\sqrt{\dfrac{4x^2}{y^6}}$, где $x < 0,\ y < 0$;

г) $\sqrt{0{,}25p^2 y^6}$, где $p \geqslant 0,\ y \leqslant 0$; з) $\sqrt{\dfrac{c^6}{9a^2}}$, где $c < 0,\ a > 0$.

488. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1}$ является натуральным числом.

489. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(-a)^2}$; б) $\sqrt{(-a)^2(-b)^4}$.

К параграфу 7

490. Вынесите множитель за знак корня:

а) $0{,}5\sqrt{60a^2}$; в) $0{,}1\sqrt{150x^3}$; д) $a\sqrt{18a^2b}$;

б) $2{,}1\sqrt{300x^4}$; г) $0{,}2\sqrt{225a^5}$; е) $-m\sqrt{48am^4}$.

491. Сравните числа:

а) $0{,}2\sqrt{200}$ и $10\sqrt{8}$; в) $0{,}5\sqrt{108}$ и $9\sqrt{3}$;

б) $7\sqrt{\frac{32}{49}}$ и $0{,}8\sqrt{50}$; г) $\frac{5}{2}\sqrt{63}$ и $4{,}5\sqrt{28}$.

492. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\frac{2}{3}\sqrt{72}$, $\sqrt{30}$ и $7\sqrt{2}$; в) $8\sqrt{0{,}2}$, $\sqrt{41}$ и $\frac{2}{5}\sqrt{250}$;

б) $5\sqrt{\frac{7}{2}}$, $\sqrt{17}$ и $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) $12\sqrt{0{,}5}$, $\sqrt{89}$ и $\frac{3}{4}\sqrt{160}$.

493. Выполните умножение:

а) $\sqrt{x}(\sqrt{a}-\sqrt{b})$; д) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(2\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

б) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})\sqrt{x}$; е) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(3\sqrt{a}+2\sqrt{b})$;

в) $\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; ж) $(2\sqrt{a}+\sqrt{b})(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})$;

г) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{mn}$; з) $(4\sqrt{x}-\sqrt{2x})(\sqrt{x}-\sqrt{2x})$.

494. Упростите выражение:

а) $(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}+x)$; в) $(\sqrt{m}-\sqrt{n})(m+n+\sqrt{mn})$;

б) $(\sqrt{a}+2)(a-2\sqrt{a}+4)$; г) $(x+\sqrt{y})(x^2+y-x\sqrt{y})$.

495. Представьте в виде квадрата суммы или квадрата разности выражение:

а) $x-4\sqrt{x-1}+3$; б) $y+2\sqrt{y+2}+3$.

496. Докажите, что:

а) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8\sqrt{3}+19}=\sqrt{3}+4$.

497. Найдите значение выражения:

а) x^2-6 при $x=1+\sqrt{5}$; в) x^2-4x+3 при $x=2+\sqrt{3}$;

б) x^2-6x при $x=3-\sqrt{3}$; г) x^2-3x+5 при $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

498. Докажите, что значения выражений

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

являются натуральными числами.

499. Докажите, что значение выражения есть число рациональное:

а) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$; б) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$.

500. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{11-2\sqrt{30}}-\frac{1}{11+2\sqrt{30}}$; в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

б) $\frac{5}{3+2\sqrt{2}}+\frac{5}{3-2\sqrt{2}}$; г) $\frac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\frac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$.

501. Найдите значение дроби $\frac{x^2-3xy+y^2}{x+y+2}$ при $x=3+\sqrt{5}$ и $y=3-\sqrt{5}$.

502. Сократите дробь:

а) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; в) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$;

б) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}$; г) $\frac{a-\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{a}+3\sqrt{3}}$.

503. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$; в) $\frac{2\sqrt{10}-5}{4-\sqrt{10}}$; д) $\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

б) $\frac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; г) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$; е) $\frac{(\sqrt{10}-1)^2-3}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-1}$.

504. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1+\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{x-\sqrt{ax}}{a\sqrt{x}}$; д) $\frac{2\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}$;

б) $\frac{y+b\sqrt{y}}{b\sqrt{y}}$; г) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; е) $\frac{2-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

505. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{x-\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; в) $\frac{1-2\sqrt{x}+4x}{1-2\sqrt{x}}$;

б) $\frac{9+3\sqrt{a}+a}{3+\sqrt{a}}$; г) $\frac{a^2b+2a\sqrt{b}+4}{a\sqrt{b}+2}$.

506. Освободитесь от иррациональности в числителе дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$;   в) $\dfrac{7-\sqrt{a}}{49-7\sqrt{a}+a}$;

б) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a\sqrt{b}}$;   г) $\dfrac{\sqrt{mn}+1}{mn+\sqrt{mn}+1}$.

507. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$;   б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+2}$.

508. При каком значении x дробь $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ принимает наибольшее значение?

509. Упростите выражение:

а) $15\sqrt{\dfrac{2}{5}}-\sqrt{160}$;   в) $6\sqrt{1\dfrac{1}{3}}-\sqrt{27}$;

б) $\sqrt{135}+10\sqrt{0{,}6}$;   г) $0{,}5\sqrt{24}+10\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

510. Упростите выражение:

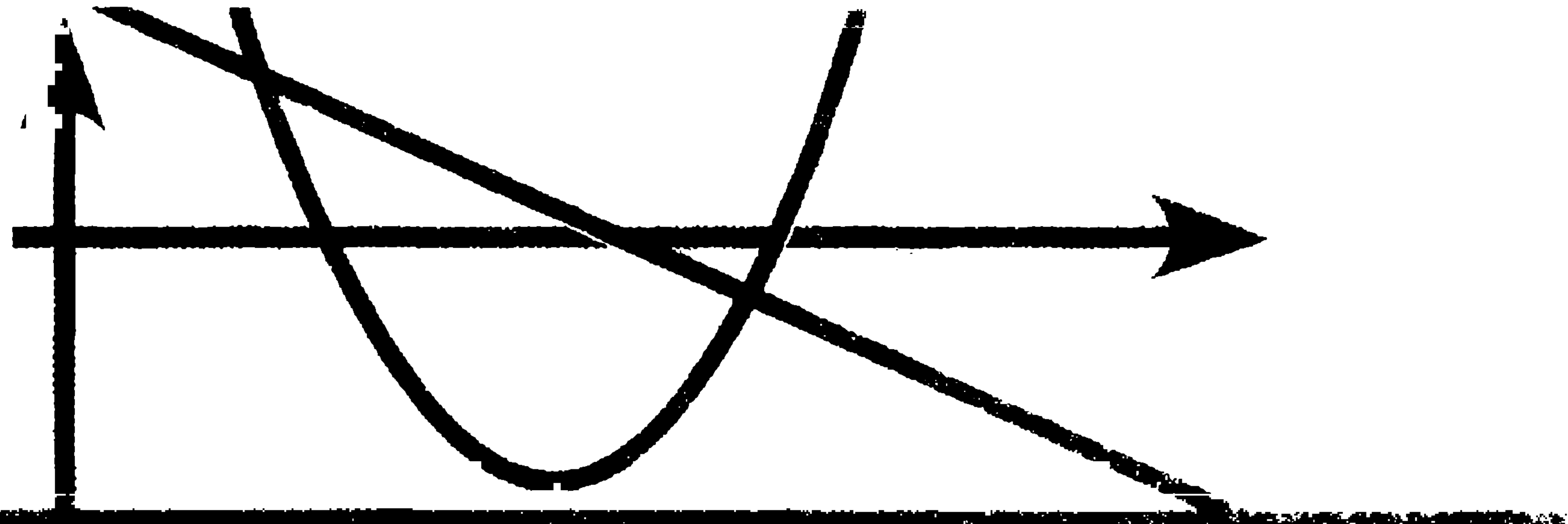
а) $\left(\dfrac{1}{x+x\sqrt{y}}+\dfrac{1}{x-x\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{y-1}{2}$;

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}$.

511. Докажите, что значение выражения

$$\sqrt{b+49-14\sqrt{b}}+\sqrt{b+49+14\sqrt{b}}$$

при $0 \leqslant b \leqslant 49$ не зависит от b.



Глава III КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8 КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

21. Неполные квадратные уравнения

Каждое из уравнений $-x^2+6x+1{,}4=0$, $8x^2-7x=0$, $x^2-\frac{4}{9}=0$ имеет вид $ax^2+bx+c=0$, где x — переменная, a, b и c — числа. В первом уравнении $a=-1$, $b=6$ и $c=1{,}4$, во втором $a=8$, $b=-7$ и $c=0$, в третьем $a=1$, $b=0$ и $c=\frac{4}{9}$. Такие уравнения называют *квадратными уравнениями*.

Определение. Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$.

Числа a, b и c — коэффициенты квадратного уравнения. Число a называют первым коэффициентом, число b — вторым коэффициентом и число c — свободным членом.

В каждом из уравнений вида $ax^2+bx+c=0$, где $a \neq 0$, наибольшая степень переменной x — квадрат. Отсюда и название: квадратное уравнение.

Заметим, что квадратное уравнение называют еще уравнением второй степени, так как его левая часть есть многочлен второй степени.

Квадратное уравнение, в котором коэффициент при x^2 равен 1, называют *приведенным квадратным уравнением*. Например, приведенными квадратными уравнениями являются уравнения

$$x^2-11x+30=0, \quad x^2-6x=0, \quad x^2-8=0.$$

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называют *неполным квадратным уравнением*. Так, уравнения $-2x^2 + 7 = 0$, $3x^2 - 10x = 0$ и $-4x^2 = 0$ — неполные квадратные уравнения. В первом из них $b = 0$, во втором $c = 0$, в третьем $b = 0$ и $c = 0$.

Неполные квадратные уравнения бывают трех видов:

1) $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$;

2) $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$;

3) $ax^2 = 0$.

Рассмотрим решение уравнений каждого из этих видов.

Пример 1. Решим уравнение $-3x^2 + 15 = 0$.

▶ Перенесем свободный член в правую часть уравнения и разделим обе части получившегося уравнения на -3:

$$-3x^2 = -15,$$
$$x^2 = 5.$$

Отсюда

$$x = \sqrt{5} \quad \text{или} \quad x = -\sqrt{5}.$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$. ◁

Пример 2. Решим уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

▶ Перенесем свободный член в правую часть уравнения и обе части получившегося уравнения разделим на 4:

$$4x^2 = -3,$$
$$x^2 = -\frac{3}{4}.$$

Так как квадрат числа не может быть отрицательным числом, то получившееся уравнение не имеет корней. А следовательно, не имеет корней и равносильное ему уравнение $4x^2 + 3 = 0$.

Ответ: корней нет. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + c = 0$ при $c \neq 0$ переносят его свободный член в правую часть и делят обе части уравнения на a. Получают уравнение

$$x^2 = -\frac{c}{a},$$

равносильное уравнению $ax^2 + c = 0$.

Так как $c \neq 0$, то $-\frac{c}{a} \neq 0$.

Если $-\frac{c}{a} > 0$, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Если $-\frac{c}{a} < 0$, то уравнение не имеет корней.

Пример 3. Решим уравнение $4x^2 + 9x = 0$.

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(4x + 9) = 0.$$

Отсюда

$$x = 0 \text{ или } 4x + 9 = 0.$$

Решим уравнение $4x + 9 = 0$:

$$4x = -9,$$
$$x = -2\frac{1}{4}.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -2\frac{1}{4}$. ◁

Вообще для решения неполного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ раскладывают его левую часть на множители и получают уравнение

$$x(ax + b) = 0.$$

Произведение $x(ax + b)$ равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } ax + b = 0.$$

Решая уравнение $ax + b = 0$, в котором $a \neq 0$, находим

$$ax = -b,$$
$$x = -\frac{b}{a}.$$

Следовательно, произведение $x(ax + b)$ обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -\frac{b}{a}$. Корнями уравнения $ax^2 + bx = 0$ являются числа 0 и $-\frac{b}{a}$.

Значит, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ при $b \neq 0$ всегда имеет два корня.

Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$ равносильно уравнению $x^2 = 0$ и поэтому имеет единственный корень 0.

Упражнения

512. Является ли квадратным уравнение:

а) $3{,}7x^2 - 5x + 1 = 0$; в) $2{,}1x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0$; д) $7x^2 - 13 = 0$;

б) $48x^2 - x^3 - 9 = 0$; г) $1 - 12x = 0$; е) $-x^2 = 0$?

513. Назовите в квадратном уравнении его коэффициенты:

а) $5x^2 - 9x + 4 = 0$; г) $x^2 + 5x = 0$;

б) $x^2 + 3x - 10 = 0$; д) $6x^2 - 30 = 0$;

в) $-x^2 - 8x + 1 = 0$; е) $9x^2 = 0$.

Какие из данных уравнений являются приведенными квадратными уравнениями?

514. Приведите примеры неполных квадратных уравнений различных видов.

515. Найдите корни уравнения:

а) $4x^2 - 9 = 0$; в) $-0{,}1x^2 + 10 = 0$; д) $6v^2 + 24 = 0$;

б) $-x^2 + 3 = 0$; г) $y^2 - \frac{1}{9} = 0$; е) $3m^2 - 1 = 0$.

516. Решите уравнение и укажите приближенные значения корней с точностью до 0,1 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $2x^2 - 17 = 0$; б) $3t^2 - 7{,}2 = 0$; в) $-p^2 + 12{,}6 = 0$.

517. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 4x = 0$; в) $10x^2 + 7x = 0$; д) $6z^2 - z = 0$;

б) $-5x^2 + 6x = 0$; г) $4a^2 - 3a = 0$; е) $2y + y^2 = 0$.

518. Решите уравнение:

а) $2x^2 + 3x = 0$; в) $5u^2 - 4u = 0$; д) $1 - 4y^2 = 0$;

б) $3x^2 - 2 = 0$; г) $7a - 14a^2 = 0$; е) $2x^2 - 6 = 0$.

519. Какое из данных неполных квадратных уравнений не имеет корней?

1. $x^2 - 19 = 0$ 2. $x^2 + 19 = 0$ 3. $x^2 - 19x = 0$ 4. $x^2 + 19x = 0$

520. При каких значениях a уравнение $(a - 2)x^2 + 15x + a^2 - 4 = 0$ является неполным квадратным уравнением? Выберите верный ответ.

1. $a = -1$ 2. $a = 1$ 3. $a = -2$ 4. $a = 2$

521. Решите уравнение:

а) $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$; в) $10 - 3x^2 = x^2 + 10 - x$;

б) $-5y^2 + 8y + 8 = 8y + 3$; г) $1 - 2y + 3y^2 = y^2 - 2y + 1$.

522. Найдите корни уравнения:

а) $(x+3)(x-4) = -12$;

б) $1\frac{2}{3}t + (2t+1)\left(\frac{1}{3}t - 1\right) = 0$;

в) $3x(2x+3) = 2x(x+4{,}5) + 2$;

г) $(x-1)(x+1) = 2(x^2-3)$.

523. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5 = (x+5)(2x-1)$;

б) $2x - (x+1)^2 = 3x^2 - 6$;

в) $6a^2 - (a+2)^2 = -4(a-4)$;

г) $(5y+2)(y-3) = -13(2+y)$.

524. Произведение двух последовательных целых чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

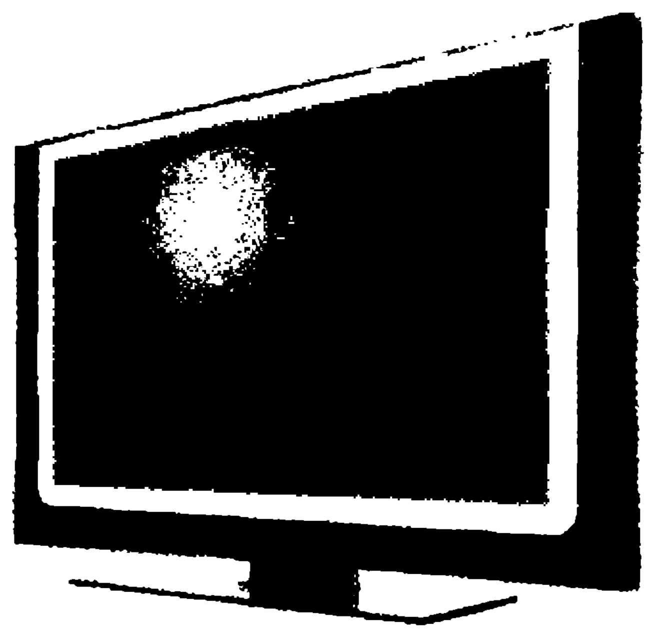
525. Теннисный корт представляет собой прямоугольную площадку, длина которой вдвое больше ширины, а площадь равна 800 м^2. Найдите длину и ширину корта.

526. Если от квадрата отрезать треугольник площадью 59 см^2, то площадь оставшейся части будет равна 85 см^2. Найдите сторону квадрата.

527. Две группы туристов отправились одновременно из одного пункта — одна на север со скоростью 4 км/ч, а другая на запад со скоростью 5 км/ч. Через какое время расстояние между туристами окажется равным 16 км?

528. Путь свободно падающего тела вычисляется по формуле $s = \frac{gt^2}{2}$, где t (с) — время, $g \approx 10$ м/с^2, s (м) — пройденный путь. Через сколько секунд от начала падения камень достигнет дна шахты глубиной 80 м?

529. Ширина земельного участка, имеющего форму прямоугольника, составляет 75% его длины, а его площадь равна 4800 м^2. Найдите длину изгороди, ограждающей этот участок.



530. Телевизор имеет плоский экран прямоугольной формы. В паспорте к телевизору указано, что длина экрана относится к ширине как 4 : 3, а диагональ равна 25 дюймам. Найдите длину и ширину экрана в дюймах; в сантиметрах (1 дюйм = 2,54 см).

531. В каких координатных четвертях расположен график функции:

а) $y = (1 - \sqrt{2})x$; б) $y = (\sqrt{35} - 5{,}7)x$?

532. Найдите значение выражения $\dfrac{9 + 6x + x^2}{x + 3} + \sqrt{x}$ при $x = 0{,}36$ и при $x = 49$.

22. Формула корней квадратного уравнения

Рассмотрим теперь, как решают квадратные уравнения, в которых оба коэффициента при неизвестных и свободный член отличны от нуля.

Начнем с примера. Решим уравнение

$$7x^2 - 6x - 1 = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на 7, получим равносильное ему приведенное квадратное уравнение

$$x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7} = 0.$$

Выделим из трехчлена $x^2 - \frac{6}{7}x - \frac{1}{7}$ квадрат двучлена. Для этого разность $x^2 - \frac{6}{7}x$ представим в виде $x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x$, прибавим к ней выражение $\left(\frac{3}{7}\right)^2$ и вычтем его. Получим

$$x^2 - 2 \cdot \frac{3}{7}x + \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 0.$$

Отсюда

$$x^2 - 2x \cdot \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \frac{1}{7},$$

$$\left(x - \frac{3}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}.$$

Следовательно,

$$x - \frac{3}{7} = -\sqrt{\frac{16}{49}} \quad \text{или} \quad x - \frac{3}{7} = \sqrt{\frac{16}{49}},$$

$$x - \frac{3}{7} = -\frac{4}{7} \quad \text{или} \quad x - \frac{3}{7} = \frac{4}{7},$$

$$x = -\frac{1}{7} \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Уравнение имеет два корня: $-\frac{1}{7}$ и 1.

Способ, с помощью которого мы решили уравнение, называют *выделением квадрата двучлена*.

Решение квадратных уравнений выделением квадрата двучлена часто приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому поступают иначе. Решают уравнение в общем виде и в результате получают формулу корней. Затем эту формулу применяют при решении любого квадратного уравнения.

Решим квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Разделив обе его части на a, получим равносильное ему приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Преобразуем это уравнение, используя преобразования, аналогичные тем, которые применялись в рассмотренном примере:

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0,$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{2}$$

Уравнение (2) равносильно уравнению (1). Число его корней зависит от знака дроби $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. Так как $a \neq 0$, то $4a^2$ — положительное число, поэтому знак этой дроби определяется знаком ее числителя, т. е. выражения $b^2 - 4ac$. Это выражение называют *дискрими-*

нантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ («дискриминант» по-латыни — различитель). Его обозначают буквой D, т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Запишем уравнение (2) в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

Рассмотрим теперь различные возможные случаи в зависимости от значения D.

1) Если $D > 0$, то

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a},$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ или } x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ и } x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Принята следующая краткая запись:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } \boldsymbol{D = b^2 - 4ac}, \qquad \text{(I)}$$

которую называют *формулой корней квадратного уравнения*.

2) Если $D = 0$, то уравнение (2) примет вид:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Отсюда

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

В этом случае уравнение (1) имеет один корень $-\frac{b}{2a}$.

Формулой корней квадратного уравнения можно пользоваться и в этом случае. Действительно, при $D = 0$ формула (I) принимает вид

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a},$$

откуда

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

3) Если $D < 0$, то значение дроби $\frac{D}{4a^2}$ отрицательно и поэтому уравнение

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2},$$

а следовательно, и уравнение (1) не имеют корней.

Таким образом, в зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение может иметь два корня (при $D > 0$), один корень (при $D = 0$) или не иметь корней (при $D < 0$).

При решении квадратного уравнения по формуле (I) целесообразно поступать следующим образом:
1) вычислить дискриминант и сравнить его с нулем;
2) если дискриминант положителен или равен нулю, то воспользоваться формулой корней, если дискриминант отрицателен, то записать, что корней нет.

Пример 1. Решим уравнение $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

▶ Найдем дискриминант:

$$D = 7^2 - 4 \cdot 12 \cdot 1 = 1, \quad D > 0.$$

Применим формулу корней квадратного уравнения:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{24},$$

$$x = \frac{-7 \pm 1}{24}.$$

Ответ: $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{4}$. ◁

Пример 2. Решим уравнение $x^2 - 12x + 36 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0,$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2},$$

$$x = \frac{12 \pm 0}{2}.$$

Ответ: 6. ◁

Пример 3. Решим уравнение $7x^2 - 25x + 23 = 0$.

▶ Имеем

$$D = (-25)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 23 = 625 - 644, \quad D < 0.$$

Ответ: корней нет. ◀

Из формулы (I) можно получить другую формулу, которой удобно пользоваться при решении квадратных уравнений с четным вторым коэффициентом.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Найдем его дискриминант: $D = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Очевидно, что число корней уравнения зависит от знака выражения $k^2 - ac$. Обозначим это выражение через D_1.

Если $D_1 \geqslant 0$, то по формуле корней квадратного уравнения получим

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a},$$

$$\text{т. е. } x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

Значит, если квадратное уравнение имеет вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

то при $D_1 \geqslant 0$ его корни могут быть найдены по формуле

$$\boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}}, \textbf{ где } \boldsymbol{D_1 = k^2 - ac}. \qquad \text{(II)}$$

Если $D_1 < 0$, то уравнение корней не имеет.

Пример 4. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

▶ Имеем $D_1 = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 4$,

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9}, \quad x = \frac{7 \pm 2}{9}.$$

Ответ: $x_1 = \frac{5}{9}$, $x_2 = 1$. ◀

Упражнения

533. Вычислите дискриминант квадратного уравнения и укажите число его корней:

а) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; в) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;

б) $2x^2 + x + 2 = 0$; г) $x^2 + 5x - 6 = 0$.

534. Решите уравнение:

а) $3x^2 - 7x + 4 = 0$;
б) $5x^2 - 8x + 3 = 0$;
в) $3x^2 - 13x + 14 = 0$;
г) $2y^2 - 9y + 10 = 0$;
д) $5y^2 - 6y + 1 = 0$;
е) $4x^2 + x - 33 = 0$;
ж) $y^2 - 10y - 24 = 0$;
з) $p^2 + p - 90 = 0$.

535. Решите уравнение:

а) $14x^2 - 5x - 1 = 0$;
б) $-y^2 + 3y + 5 = 0$;
в) $2x^2 + x + 67 = 0$;
г) $1 - 18p + 81p^2 = 0$;
д) $-11y + y^2 - 152 = 0$;
е) $18 + 3x^2 - x = 0$.

536. Найдите корни уравнения:

а) $5x^2 - 11x + 2 = 0$;
б) $2p^2 + 7p - 30 = 0$;
в) $9y^2 - 30y + 25 = 0$;
г) $35x^2 + 2x - 1 = 0$;
д) $2y^2 - y - 5 = 0$;
е) $16x^2 - 8x + 1 = 0$.

537. При каких значениях x:

а) трехчлен $x^2 - 11x + 31$ принимает значение, равное 1;
б) значения многочленов $x^2 - 5x - 3$ и $2x - 5$ равны;
в) двучлен $7x + 1$ равен трехчлену $3x^2 - 2x + 1$;
г) трехчлен $-2x^2 + 5x + 6$ равен двучлену $4x^2 + 5x$?

538. При каких значениях x принимают равные значения:

а) двучлены $x^2 - 6x$ и $5x - 18$;
б) трехчлены $3x^2 - 4x + 3$ и $x^2 + x + 1$?

539. Решите уравнение, используя формулу (II):

а) $3x^2 - 14x + 16 = 0$;
б) $5x^2 - 16x + 3 = 0$;
в) $x^2 + 2x - 80 = 0$;
г) $x^2 - 22x - 23 = 0$;
д) $4x^2 - 36x + 77 = 0$;
е) $15y^2 - 22y - 37 = 0$;
ж) $7z^2 - 20z + 14 = 0$;
з) $y^2 - 10y - 25 = 0$.

540. Решите уравнение:

а) $8x^2 - 14x + 5 = 0$;
б) $12x^2 + 16x - 3 = 0$;
в) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;
г) $x^2 - 8x - 84 = 0$;
д) $x^2 + 6x - 19 = 0$;
е) $5x^2 + 26x - 24 = 0$;
ж) $x^2 - 34x + 289 = 0$;
з) $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

541. Решите уравнение:

а) $2x^2 - 5x - 3 = 0$;
б) $3x^2 - 8x + 5 = 0$;
в) $5x^2 + 9x + 4 = 0$;
г) $36y^2 - 12y + 1 = 0$;
д) $3t^2 - 3t + 1 = 0$;
е) $x^2 + 9x - 22 = 0$;
ж) $y^2 - 12y + 32 = 0$;
з) $100x^2 - 160x + 63 = 0$.

542. Решите уравнение:

а) $5x^2 = 9x + 2$; д) $y^2 = 52y - 576$;

б) $-x^2 = 5x - 14$; е) $15y^2 - 30 = 22y + 7$;

в) $6x + 9 = x^2$; ж) $25p^2 = 10p - 1$;

г) $z - 5 = z^2 - 25$; з) $299x^2 + 100x = 500 - 101x^2$.

543. Решите уравнение:

а) $25 = 26x - x^2$; г) $3p^2 + 3 = 10p$;

б) $3x^2 = 10 - 29x$; д) $x^2 - 20x = 20x + 100$;

в) $y^2 = 4y + 96$; е) $25x^2 - 13x = 10x^2 - 7$.

544. Найдите корни уравнения:

а) $(2x - 3)(5x + 1) = 2x + \frac{2}{5}$; в) $(x - 1)(x + 1) = 2\left(5x - 10\frac{1}{2}\right)$;

б) $(3x - 1)(x + 3) = x(1 + 6x)$; г) $-x(x + 7) = (x - 2)(x + 2)$.

545. Решите уравнение:

а) $(x + 4)^2 = 3x + 40$; в) $(x + 1)^2 = 7918 - 2x$;

б) $(2x - 3)^2 = 11x - 19$; г) $(x + 2)^2 = 3131 - 2x$.

546. Найдите корни уравнения:

а) $3(x + 4)^2 = 10x + 32$; в) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$;

б) $15x^2 + 17 = 15(x + 1)^2$; г) $(x - 2)^2 + 48 = (2 - 3x)^2$.

547. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$; в) $\frac{4x^2 - 1}{3} = x(10x - 9)$;

б) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$; г) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}$.

548. Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $5x^2 - x - 1 = 0$; в) $3(y^2 - 2) - y = 0$;

б) $2x^2 + 7x + 4 = 0$; г) $y^2 + 8(y - 1) = 3$.

549. Решите уравнение $x^2 = 0{,}5x + 3$ сначала графически, а затем с помощью формулы корней.

550. Найдите корни уравнения и укажите их приближенные значения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01 (воспользуйтесь калькулятором):

а) $x^2 - 8x + 9 = 0$; б) $2y^2 - 8y + 5 = 0$.

551. Решите уравнение:

а) $0{,}7x^2 = 1{,}3x + 2$;
б) $7 = 0{,}4y + 0{,}2y^2$;
в) $x^2 - 1{,}6x - 0{,}36 = 0$;
г) $z^2 - 2z + 2{,}91 = 0$;
д) $0{,}2y^2 - 10y + 125 = 0$;
е) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - 9 = 0$.

552. При каких значениях x верно равенство:

а) $\frac{1}{7}x^2 = 2x - 7$; б) $x^2 + 1{,}2 = 2{,}6x$; в) $4x^2 = 7x + 7{,}5$?

553. Существует ли такое значение a, при котором верно равенство (если существует, то найдите его):

а) $3a + 0{,}6 = 9a^2 + 0{,}36$; б) $0{,}4a + 1{,}2 = 0{,}16a^2 + 1{,}44$?

554. Решите уравнения:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $6x^2 - 5x + 1 = 0$;
б) $2x^2 - 13x + 6 = 0$ и $6x^2 - 13x + 2 = 0$.

Какое предположение о соотношении корней уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ вы можете высказать? Проведите доказательство.

555. Существует ли такое значение a, при котором уравнение

$$x^2 - ax + a - 4 = 0$$

а) не имеет корней; б) имеет один корень; в) имеет два корня?

556. Найдите значение выражения:

$$\frac{a - \frac{2a-1}{a}}{\frac{1-a}{3a}} \quad \text{при } a = -1{,}5.$$

557. Упростите выражение:

а) $(\sqrt{21} + \sqrt{14} - 2\sqrt{35}) \cdot \frac{\sqrt{7}}{7} + \sqrt{20}$;
б) $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{15})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \sqrt{75}$.

558. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков линейных функций:

а) $y = 7x - 1$ и $y = 2x$; б) $y = 3x - 11$ и $y = 4$.

23. Решение задач с помощью квадратных уравнений

Многие задачи в математике, физике, технике решаются с помощью квадратных уравнений.

Задача 1. Найдем катеты прямоугольного треугольника, если известно, что один из них на 4 см меньше другого, а гипотенуза равна 20 см.

▶ Пусть меньший катет равен x см. Тогда больший катет равен $(x + 4)$ см. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, т. е.

$$x^2 + (x + 4)^2 = 20^2.$$

Упростим это уравнение:

$$x^2 + x^2 + 8x + 16 = 400,$$
$$2x^2 + 8x - 384 = 0,$$
$$x^2 + 4x - 192 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем, что

$$x_1 = -16, \quad x_2 = 12.$$

По смыслу задачи значение x должно быть положительным числом. Этому условию удовлетворяет только второй корень, т. е. число 12.

Ответ: 12 см, 16 см. ◁

Задача 2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Через сколько секунд оно окажется на высоте 60 м?

▶ Из курса физики известно, что если не учитывать сопротивление воздуха, то высота h (м), на которой брошенное вертикально вверх тело окажется через t (с), может быть найдена по формуле

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

где v_0 (м/с) — начальная скорость, g — ускорение свободного падения, приближенно равное 10 м/с^2.

Подставив значения h и v_0 в формулу, получим

$$60 = 40t - 5t^2.$$

Отсюда

$$5t^2 - 40t + 60 = 0,$$
$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем, что $t_1 = 2$, $t_2 = 6$.

На рисунке 21 дан график зависимости h от t, где $h = 40t - 5t^2$. Из графика видно, что тело, брошенное вертикально вверх, в течение первых 4 с поднимается вверх до высоты 80 м, а затем начинает падать. На высоте 60 м от земли оно оказывается дважды: через 2 с и через 6 с после бросания.

Условию задачи удовлетворяют оба найденных корня. Значит, ответ на вопрос задачи таков: на высоте 60 м тело окажется через 2 с и через 6 с. ◁

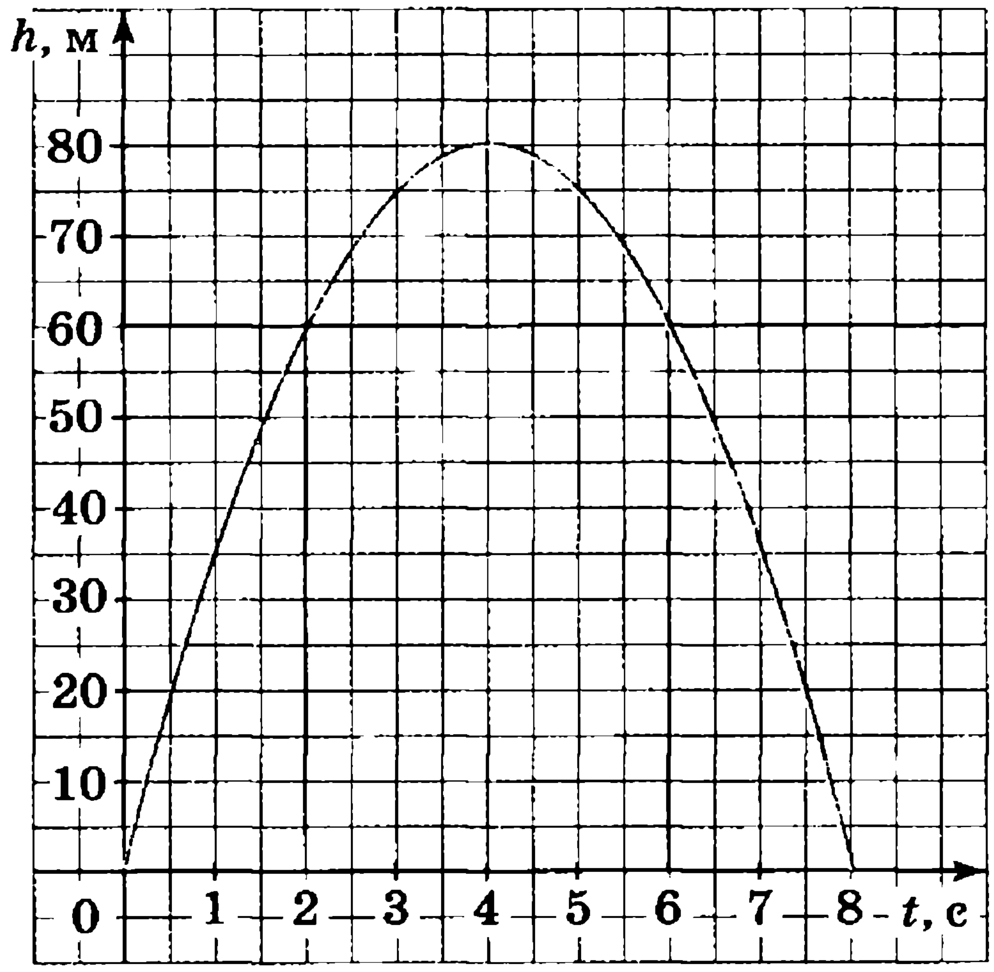


Рис. 21

Упражнения

559. Произведение двух натуральных чисел, одно из которых на 6 больше другого, равно 187. Найдите эти числа.

560. Найдите периметр прямоугольника, длина которого на 4 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2.

561. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2.

562. Периметр прямоугольника равен 62 м. Найдите его стороны, если площадь прямоугольника равна 210 м^2.

563. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если известно, что их сумма равна 23 см, а площадь данного треугольника равна 60 см^2.

564. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 109. Найдите эти числа.

565. Площадь доски прямоугольной формы равна 4500 см^2. Доску распилили на две части, одна из которых представляет собой квадрат, а другая — прямоугольник. Найдите сторону получившегося квадрата, если длина отпиленного прямоугольника равна 120 см.

566. От прямоугольного листа картона длиной 26 см отрезали с двух сторон квадраты, сторона каждого из которых равна ширине листа. Площадь оставшейся части равна 80 см^2. Найдите ширину листа картона. Покажите, что задача имеет два решения, и для каждого случая сделайте чертеж (в масштабе 1 : 2).

567. В прямоугольном треугольнике один из катетов на 3 см меньше гипотенузы, а другой — на 6 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.

568. В кинотеатре число мест в ряду на 8 больше числа рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в нем имеется 884 места?

569. *Старинная задача.* Стая обезьян забавляется. Восьмая часть их в квадрате резвится в лесу. Остальные двенадцать кричат на вершине холма. Скажи мне, сколько всего обезьян?

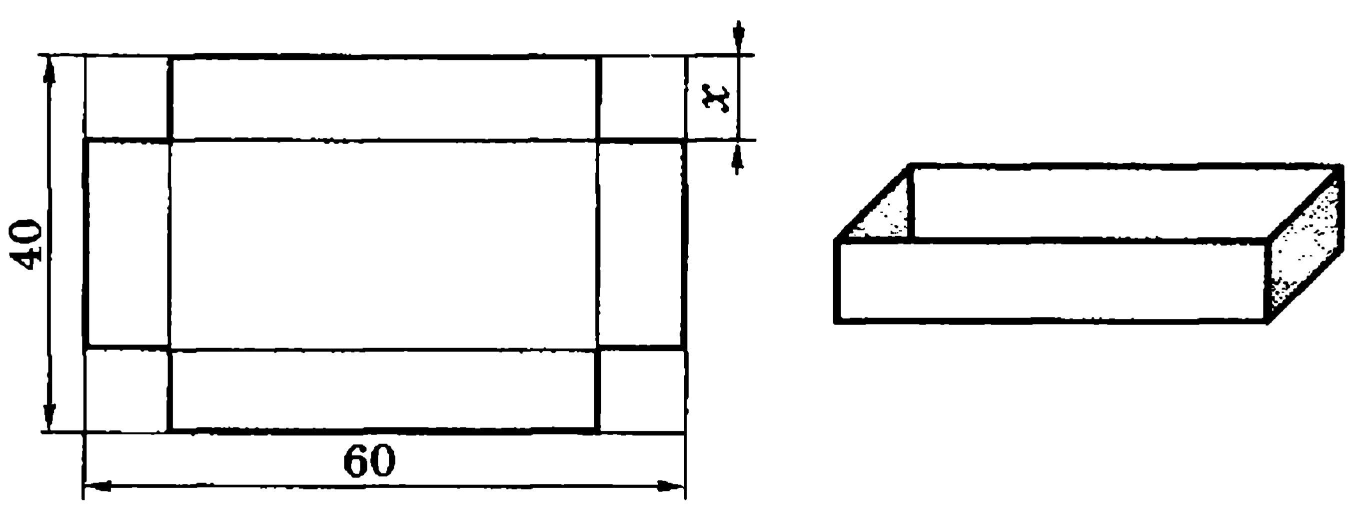
570. *Старинная задача.* Квадрат пятой части обезьян, уменьшенной на 3, спрятался в гроте. Одна обезьяна, влезшая на дерево, была видна. Сколько было обезьян?

571. Число диагоналей p выпуклого многоугольника вычисляется по формуле $p = \frac{n(n-3)}{2}$, где n — число сторон. В каком выпуклом многоугольнике диагоналей на 25 больше, чем сторон?

572. При розыгрыше первенства школы по футболу было сыграно 36 матчей, причем каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Сколько команд участвовало в розыгрыше?

573. В шахматном турнире было сыграно 45 партий. Определите число участников турнира, если известно, что каждый участник сыграл с каждым по одной партии.

574. От прямоугольного листа картона, длина которого равна 60 см, а ширина — 40 см, отрезали по углам равные квадраты и из оставшейся части склеили открытую коробку. Найдите сторону квадрата, если известно, что площадь основания коробки равна 800 см^2.



575. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 869.

576. Сократите дробь:

а) $\dfrac{8a^3 - 27}{9 - 12a + 4a^2}$; б) $\dfrac{ax - 2x - 4a + 8}{3a - 6 - ax + 2x}$.

577. Найдите значение выражения:

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - b}{2\sqrt{ab} + 2b + 1} \text{ при } a = 5,\ b = 2.$$

578. Решите уравнение:

а) $\dfrac{x(x - 3)}{6} - \dfrac{x}{2} = 0$; б) $\dfrac{x(x + 1)}{3} + \dfrac{8 + x}{4} = 2$.

579. Не выполняя построения, найдите координаты точек пересечения графика функции $y = 13x - 2{,}6$ с осью x и осью y.

24. Теорема Виета

Приведенное квадратное уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ имеет корни 2 и 5. Сумма корней равна 7, а произведение равно 10. Мы видим, что сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену. Докажем, что таким свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни.

ТЕОРЕМА

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

● Рассмотрим приведенное квадратное уравнение. Обозначим второй коэффициент буквой p, а свободный член буквой q:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Дискриминант этого уравнения D равен $p^2 - 4q$.

Пусть $D > 0$. Тогда это уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}.$$

Найдем сумму и произведение корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Итак,

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.}$$

Теорема доказана. ○

При $D = 0$ квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет один корень. Если условиться считать, что при $D = 0$ квадратное уравнение имеет два равных корня, то теорема будет верна и в этом случае. Это следует из того, что при $D = 0$ корни уравнения также можно вычислять по формуле

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Доказанная теорема называется теоремой Виета по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета.

Используя теорему Виета, можно выразить сумму и произведение корней произвольного квадратного уравнения через его коэффициенты.

Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Равносильное ему приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

По теореме Виета

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.}$$

Справедливо утверждение, обратное теореме Виета:

ТЕОРЕМА

Если числа m и n таковы, что их сумма равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

● По условию $m + n = -p$, а $mn = q$. Значит, уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно записать в виде

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Подставив вместо x число m, получим:

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0.$$

Значит, число m является корнем уравнения.

Аналогично можно показать, что число n также является корнем уравнения. ○

Рассмотрим примеры применения теоремы Виета и теоремы, обратной теореме Виета.

Пример 1. Найдем сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 - 5x + 2 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$ — положительное число. Значит, уравнение имеет корни. Эти же корни имеет приведенное квадратное уравнение $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$. Значит, сумма корней уравнения $3x^2 - 5x + 2 = 0$ равна $\frac{5}{3}$, а произведение равно $\frac{2}{3}$.

По теореме, обратной теореме Виета, можно проверять, правильно ли найдены корни квадратного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $x^2 + 3x - 40 = 0$ и выполним проверку по теореме, обратной теореме Виета.

▶ Найдем дискриминант:

$$D = 3^2 + 4 \cdot 40 = 169.$$

По формуле корней квадратного уравнения получаем

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{169}}{2}, \quad x = \frac{-3 \pm 13}{2}.$$

Отсюда

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 5.$$

ФРАНСУА ВИЕТ (1540—1603) — французский математик, ввел систему алгебраических символов, разработал основы элементарной алгебры. Он был одним из первых, кто числа стал обозначать буквами, что существенно развило теорию уравнений.

Покажем, что корни уравнения найдены правильно. В уравнении $x^2 + 3x - 40 = 0$ коэффициент p равен 3, а свободный член q равен -40. Сумма найденных чисел -8 и 5 равна -3, а их произведение равно -40. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, эти числа являются корнями уравнения $x^2 + 3x - 40 = 0$. ◁

Пример 3. Найдем подбором корни уравнения

$$x^2 - x - 12 = 0.$$

▶ Дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$ — положительное число. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения. Тогда

$$x_1 + x_2 = 1 \text{ и } x_1 \cdot x_2 = -12.$$

Если x_1 и x_2 — целые числа, то они являются делителями числа -12. Учитывая также, что сумма этих чисел равна 1, нетрудно догадаться, что $x_1 = -3$ и $x_2 = 4$. ◁

Упражнения

580. Найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 37x + 27 = 0$;
б) $y^2 + 41y - 371 = 0$;
в) $x^2 - 210x = 0$;
г) $y^2 - 19 = 0$;
д) $2x^2 - 9x - 10 = 0$;
е) $5x^2 + 12x + 7 = 0$;
ж) $-z^2 + z = 0$;
з) $3x^2 - 10 = 0$.

581. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 2x - 9 = 0$;
б) $3x^2 - 4x - 4 = 0$;
в) $2x^2 + 7x - 6 = 0$;
г) $2x^2 + 9x + 8 = 0$.

582. Найдите корни уравнения и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 15x - 16 = 0$;
б) $x^2 - 6x - 11 = 0$;
в) $12x^2 - 4x - 1 = 0$;
г) $x^2 - 6 = 0$;
д) $5x^2 - 18x = 0$;
е) $2x^2 - 41 = 0$.

583. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 - 9x + 20 = 0$;
б) $x^2 + 11x - 12 = 0$;
в) $x^2 + x - 56 = 0$;
г) $x^2 - 19x + 88 = 0$.

584. Найдите подбором корни уравнения:

а) $x^2 + 16x + 63 = 0$;
б) $x^2 + 2x - 48 = 0$.

585. В уравнении $x^2 + px - 35 = 0$ один из корней равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p.

586. Один из корней уравнения $x^2 - 13x + q = 0$ равен 12,5. Найдите другой корень и коэффициент q.

587. Один из корней уравнения $5x^2 + bx + 24 = 0$ равен 8. Найдите другой корень и коэффициент b.

588. Один из корней уравнения $10x^2 - 33x + c = 0$ равен 5,3. Найдите другой корень и коэффициент c.

589. Разность корней квадратного уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q.

590. Разность корней квадратного уравнения $x^2 + x + c = 0$ равна 6. Найдите c.

591. Разность квадратов корней квадратного уравнения $x^2 + 2x + q = 0$ равна 12. Найдите q.

592. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 3x + a = 0$ равна 65. Найдите a.

593. Докажите, что уравнение не может иметь корни одинаковых знаков:

а) $3x^2 + 113x - 7 = 0$; б) $5x^2 - 291x - 16 = 0$.

594. Не решая уравнения, выясните, имеет ли оно корни, и если имеет, то определите их знаки:

а) $x^2 + 7x - 1 = 0$; г) $19x^2 - 23x + 5 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 1 = 0$; д) $2x^2 + 5\sqrt{3}x + 11 = 0$;
в) $5x^2 + 17x + 16 = 0$; е) $11x^2 - 9x + 7 - 5\sqrt{2} = 0$.

595. Выясните, имеет ли уравнение корни, и если имеет, то каковы их знаки:

а) $x^2 - 18x + 17 = 0$; г) $5x^2 - x - 108 = 0$;
б) $x^2 - 2x - 1 = 0$; д) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$;
в) $x^2 - 15x + 56 = 0$; е) $\sqrt{3}x^2 - 12x - 7\sqrt{3} = 0$.

П

596. При каких значениях x верно равенство:

а) $(3x+1)^2 = 3x + 1$; г) $(3x + 4)^2 = 4(x + 3)$;
б) $(3x+1)^2 = 3(x+1)$; д) $4(x+3)^2 = (2x+6)^2$;
в) $(3x+1)^2 = (2x-5)^2$; е) $(6x+3)^2 = (x-4)^2$?

597. Катеты прямоугольного треугольника относятся как 8 : 15, а гипотенуза равна 6,8 м. Найдите площадь треугольника.

598. Отношение гипотенузы прямоугольного треугольника к одному из катетов равно $\frac{13}{12}$, другой катет равен 15 см. Найдите периметр треугольника.

599. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них на 14 см больше другой, а диагональ прямоугольника равна 34 см.

Контрольные вопросы

1. Что называют дискриминантом квадратного уравнения? Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
2. Напишите формулу корней квадратного уравнения.
3. Напишите формулу корней квадратного уравнения, в котором второй коэффициент является четным числом.
4. Сформулируйте и докажите теорему Виета. Чему равны сумма и произведение корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Виета.

§ 9 ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

25. Решение дробных рациональных уравнений

В уравнениях

$$2x + 5 = 3(8 - x), \quad x - \frac{5}{x} = -3x + 19, \quad \frac{x - 4}{2x + 1} = \frac{x - 9}{x}$$

левая и правая части являются рациональными выражениями. Такие уравнения называют *рациональными уравнениями*. Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называют *целым*. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют *дробным*. Так, уравнение $2x + 5 = 3(8 - x)$ целое, а уравнения $x - \frac{5}{x} = -3x + 19$ и $\frac{x - 4}{2x + 1} = \frac{x - 9}{x}$ дробные рациональные.

Пример 1. Решим целое уравнение

$$\frac{x - 1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}.$$

▶ Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на число 6. Получим уравнение, равносильное данному, не содержащее дробей:

$$3(x-1)+4x=5x.$$

Решив его, найдем, что $x = 1{,}5$. ◁

Пример 2. Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)}. \qquad (1)$$

▶ По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $x(x-5)$. Получим целое уравнение

$$x(x-3)+x-5=x+5. \qquad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).
Упростив уравнение (2), получим квадратное уравнение

$$x^2-3x-10=0.$$

Его корни — числа -2 и 5.
Проверим, являются ли числа -2 и 5 корнями уравнения (1).
При $x = -2$ общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в нуль. Значит, число -2 — корень уравнения (1).
При $x = 5$ общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1).
Итак, корнем уравнения (1) служит только число -2. ◁

Вообще при решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:
1) **найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;**
2) **умножить обе части уравнения на общий знаменатель;**
3) **решить получившееся целое уравнение;**
4) **исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.**

Пример 3. Решим уравнение $\frac{2}{x^2-4}-\frac{1}{x^2-2x}=\frac{4-x}{x^2+2x}$.

▶ Имеем $\frac{2}{(x-2)(x+2)}-\frac{1}{x(x-2)}=\frac{4-x}{x(x+2)}$.

Общий знаменатель дробей $x(x-2)(x+2)$.

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$2x-(x+2)=(4-x)(x-2).$$

Отсюда

$$2x-x-2=4x-x^2-8+2x,$$

$$x^2-5x+6=0,$$

$$D=25-24=1,$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2},$$

$$x=\frac{5\pm 1}{2},$$

$$x_1=2,\ x_2=3.$$

Если $x=2$, то $x(x-2)(x+2)=0$; если $x=3$, то $x(x-2)(x+2)\neq 0$. Значит, корнем исходного уравнения является число 3.

Ответ: 3. ◁

Упражнения

600. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{y^2}{y+3}=\frac{y}{y+3}$; г) $\frac{y^2-6y}{y-5}=\frac{5}{5-y}$; ж) $\frac{5y+1}{y+1}=\frac{y+2}{y}$;

б) $\frac{x^2}{x^2-4}=\frac{5x-6}{x^2-4}$; д) $\frac{2x-1}{x+7}=\frac{3x+4}{x-1}$; з) $\frac{1+3x}{1-2x}=\frac{5-3x}{1+2x}$;

в) $\frac{2x^2}{x-2}=\frac{-7x+6}{2-x}$; е) $\frac{2y+3}{2y-1}=\frac{y-5}{y+3}$; и) $\frac{x-1}{2x+3}-\frac{2x-1}{3-2x}=0$.

601. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-5}{x+5}-4=0$; д) $\frac{8}{x}=3x+2$;

б) $\frac{12}{7-x}=x$; е) $\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x}{3}$;

в) $\frac{x^2-4}{4x}=\frac{3x-2}{2x}$; ж) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-5}=0$;

г) $\frac{10}{2x-3}=x-1$; з) $\frac{4x^3-9x}{x+1,5}=0$.

602. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{7x}{x^2+1}$; д) $\dfrac{x^2+3}{x^2+1} = 2$;

б) $\dfrac{y^2}{y^2-6y} = \dfrac{4(3-2y)}{y(6-y)}$; е) $\dfrac{3}{x^2+2} = \dfrac{1}{x}$;

в) $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{x+3}{x-4}$; ж) $x+2 = \dfrac{15}{4x+1}$;

г) $\dfrac{8y-5}{y} = \dfrac{9y}{y+2}$; з) $\dfrac{x^2-5}{x-1} = \dfrac{7x+10}{9}$.

603. Решите уравнение:

а) $\dfrac{3x+1}{x+2} - \dfrac{x-1}{x-2} = 1$; г) $\dfrac{4}{x+3} - \dfrac{5}{3-x} = \dfrac{1}{x-3} - 1$;

б) $\dfrac{2y-2}{y+3} + \dfrac{y+3}{y-3} = 5$; д) $\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{5-x}{x^2-x}$;

в) $\dfrac{4}{9y^2-1} - \dfrac{4}{3y+1} = \dfrac{5}{1-3y}$; е) $\dfrac{3y-2}{y} - \dfrac{1}{y-2} = \dfrac{3y+4}{y^2-2y}$.

604. При каком значении x:

а) значение функции $y = \dfrac{2x-1}{x+6}$ равно 5; –3; 0; 2;

б) значение функции $y = \dfrac{x^2+x-2}{x+3}$ равно –10; 0; –5?

605. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{x-4}{x-5} + \dfrac{x-6}{x+5} = 2$; г) $\dfrac{3}{y-2} + \dfrac{7}{y+2} = \dfrac{10}{y}$;

б) $\dfrac{1}{2-x} - 1 = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{6-x}{3x^2-12}$; д) $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} = 3\dfrac{1}{3}$;

в) $\dfrac{7y-3}{y-y^2} = \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{5}{y(y-1)}$; е) $\dfrac{5x+7}{x-2} - \dfrac{2x+21}{x+2} = 8\dfrac{2}{3}$.

606. Найдите значение переменной y, при котором:

а) сумма дробей $\dfrac{3y+9}{3y-1}$ и $\dfrac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

б) разность дробей $\dfrac{5y+13}{5y+4}$ и $\dfrac{4-6y}{3y-1}$ равна 3;

в) сумма дробей $\dfrac{y+1}{y-5}$ и $\dfrac{10}{y+5}$ равна их произведению;

г) разность дробей $\dfrac{6}{y-4}$ и $\dfrac{y}{y+2}$ равна их произведению.

607. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{y-2}-\frac{4}{y-3}=\frac{1}{y}$;

б) $\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x+3}$;

в) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$;

г) $\frac{10}{y^3-y}+\frac{1}{y-y^2}=\frac{1}{1+y}$;

д) $1+\frac{45}{x^2-8x+16}=\frac{14}{x-4}$;

е) $\frac{5}{x-1}-\frac{4}{3-6x+3x^2}=3$.

608. Решите уравнение:

а) $\frac{10}{(x-5)(x+1)}+\frac{x}{x+1}=\frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{17}{(x-3)(x+4)}-\frac{1}{x-3}=\frac{x}{x+4}$;

в) $\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2-1}=0$;

г) $\frac{4}{9x^2-1}+\frac{1}{3x^2-x}=\frac{4}{9x^2-6x+1}$.

609. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{21}{x+1}=\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}$;

б) $\frac{2}{y^2-3y}-\frac{1}{y-3}=\frac{5}{y^3-9y}$;

в) $\frac{18}{4x^2+4x+1}-\frac{1}{2x^2-x}=\frac{6}{4x^2-1}$.

610. Решите уравнение:

а) $1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-x^2}}}=1\frac{7}{24}$;

б) $1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10-x^2}}}=\frac{3}{5}$.

611. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{x}=x$; б) $\frac{6}{x}=-x+6$.

612. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение $\frac{1}{x}=ax+b$, где a и b — некоторые числа. Для каждого случая укажите, каким условиям должны удовлетворять числа a и b.

613. Найдите значение выражения $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$.

614. Принадлежат ли графику функции $y = x^2 + 2x + 5$ точки $A(1{,}5;\ 7{,}25)$, $B(-3{,}2;\ 9)$ и $C(\sqrt{3} - 1;\ 7)$?

615. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \sqrt{x}$; б) $\sqrt{x} - \dfrac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

616. Сравните с нулем значение выражения:

а) $\dfrac{3ab}{a^2 + b^2}$, где $a > 0$, $b < 0$; б) $\dfrac{5a^3b^2}{a + b}$, где $a < 0$, $b < 0$.

26. Решение задач с помощью рациональных уравнений

Решение многих задач приводит к дробным рациональным уравнениям.

Задача 1. Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

▶ Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки по течению $(x + 3)$ км/ч, а против течения $(x - 3)$ км/ч. По течению реки 25 км лодка прошла за $\dfrac{25}{x + 3}$ ч, а против течения 3 км — за $\dfrac{3}{x - 3}$ ч. Значит, время, затраченное на весь путь, равно $\left(\dfrac{25}{x + 3} + \dfrac{3}{x - 3}\right)$ ч. По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 ч. Следовательно,

$$\frac{25}{x + 3} + \frac{3}{x - 3} = 2.$$

Решив это уравнение, найдем его корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$.
По смыслу задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Этому условию удовлетворяет второй корень — число 12 и не удовлетворяет первый.
Ответ: 12 км/ч. ◁

Задача 2. К сплаву меди и цинка, содержащему 10 кг цинка, добавили 20 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве уменьшилось на 25%. Какова была первоначальная масса сплава?

▶ Пусть первоначальная масса сплава была равна x кг. Тогда меди в нем было $(x - 10)$ кг и она составляла $\frac{x-10}{x} \cdot 100\%$ от массы сплава. Масса нового сплава, полученного после добавления 20 кг цинка, оказалась равной $(x + 20)$ кг, а медь в нем составила $\frac{x-10}{x+20} \cdot 100\%$.

По условию задачи содержание меди уменьшилось на 25%. Следовательно,

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\% - \frac{x-10}{x+20} \cdot 100\% = 25\%.$$

Отсюда

$$\frac{(x-10) \cdot 4}{x} - \frac{(x-10) \cdot 4}{x+20} = 1.$$

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня: $x_1 = 20$ и $x_2 = 40$. Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 20 кг или 40 кг. ◁

Упражнения

617. Знаменатель обыкновенной дроби больше ее числителя на 3. Если к числителю этой дроби прибавить 7, а к знаменателю — 5, то она увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

618. Из города в село, находящееся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два автомобиля. Скорость одного была на 20 км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришел к месту назначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.

619. Один из лыжников прошел расстояние в 20 км на 20 мин быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей, чем другой.

620. Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.

621. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой шел по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

622. В прошлом году в фермерском хозяйстве собрали 192 ц пшеницы. В этом году благодаря использованию новых технологий удалось повысить урожайность пшеницы на 2 ц с гектара. В результате такой же урожай собрали с площади, на 0,4 га меньшей. Какова была урожайность пшеницы в хозяйстве в прошлом году?

623. На молодежном карнавале Андрей купил билеты лотереи «Надежда» на 240 р. Если бы он потратил эти деньги на билеты лотереи «Удача», то смог бы купить на 4 билета больше, так как они были на 5 р. дешевле. Сколько стоил билет лотереи «Надежда»?

624. Предприниматель приобрел акции одинаковой стоимости на 110 000 р. Если бы он отложил покупку на год, то сумел бы приобрести на эту сумму на 20 акций меньше, так как цена одной акции данного вида возросла за этот год на 50 р. Сколько акций приобрел предприниматель?

625. *Старинная задача.* Несколько человек обедали вместе и по счету должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало?

626. Сотрудники отдела решили совместно приобрести холодильник за 7200 р. Однако трое отказались участвовать в покупке, и остальным пришлось уплатить на 200 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников работает в отделе?

627. Турист проплыл на лодке против течения реки 6 км и по озеру 15 км, затратив на путь по озеру на 1 ч больше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч, найдите скорость лодки при движении по озеру.

628. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч, прошла по течению реки 35 км, а против течения 25 км. По течению она шла столько же времени, сколько против течения. Какова скорость течения реки?

629. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошел 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

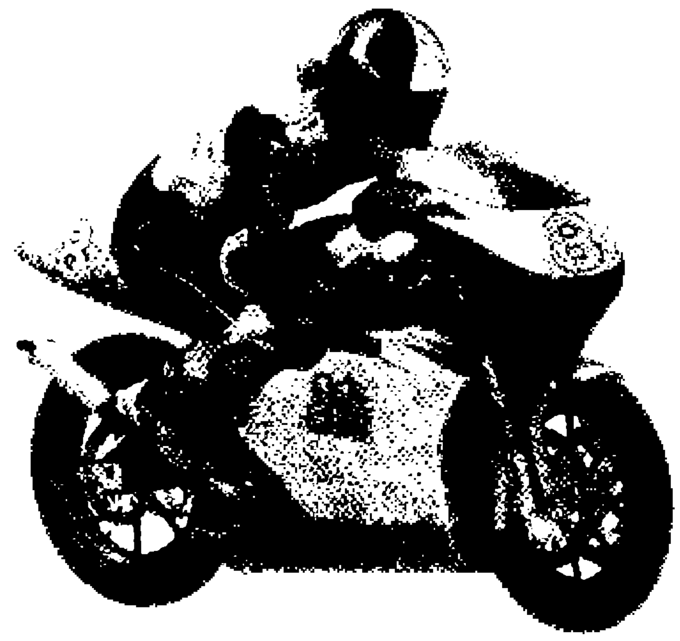
630. В водный раствор соли добавили 100 г воды. В результате концентрация соли в растворе понизилась на 1%. Определите первоначальную массу раствора, если известно, что в нем содержалось 30 г соли.

631. Сплав золота и серебра содержал 40 г золота. После того как к нему добавили 50 г золота, получили новый сплав, в котором содержание золота возросло на 20%. Сколько серебра было в сплаве?

632. При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

633. Два автомата разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый автомат, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму автомату?

634. Велосипедист проехал из поселка до станции с некоторой постоянной скоростью, а возвращался со скоростью на 5 км/ч большей. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что средняя скорость на всем пути следования составляла 12 км/ч?



635. Мотоциклист половину пути проехал с некоторой постоянной скоростью, а затем снизил скорость на 20 км/ч. Какова была скорость мотоциклиста на первой половине пути, если известно, что средняя скорость на всем пути составила 37,5 км/ч?

636. Докажите, что:

а) $\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}+\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}=22$; б) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=18$.

637. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{xy}{x+y}$ при $x=5+2\sqrt{6}$, $y=5-2\sqrt{6}$;

б) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ при $x=\sqrt{11}+\sqrt{3}$, $y=\sqrt{11}-\sqrt{3}$.

638. Найдите значение q, при котором разность корней уравнения $x^2-10x+q=0$ равна 6.

639. Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

а) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$; б) $2-\sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Контрольные вопросы

1. Приведите пример целого уравнения и пример дробного рационального уравнения.
2. Объясните на примере, как решают дробное рациональное уравнение.

Для тех, кто хочет знать больше

27. Уравнения с параметром

Каждое из уравнений

$$7x = 5, \ -3x = 5, \ 0x = 5$$

имеет вид $ax = 5$, где a — некоторое число.

Первое уравнение, в котором $a = 7$, имеет корень $\frac{5}{7}$. Второе уравнение, в котором $a = -3$, имеет корень $\frac{5}{-3}$. Третье уравнение, в котором $a = 0$, не имеет корней.

Вообще, уравнение вида $ax = 5$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень $\frac{5}{a}$, а при $a = 0$ не имеет корней.

Рассматривая уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам a и x различный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что a является *параметром*, а $ax = 5$ — уравнение с параметром.

Для уравнения $ax = 5$ мы выяснили, что при любом значении параметра a, не равном нулю, корень уравнения можно найти по формуле $x = \frac{5}{a}$, а при $a = 0$ это уравнение корней не имеет. В таких случаях говорят, что мы *решили уравнение с параметром*.

Вообще решить уравнение с параметром — это значит показать, каким образом для любого значения параметра можно найти соответствующее множество корней уравнения, если корни существуют, или установить, что при этом значении параметра корней нет.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$bx - 3x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12$$

с параметром b.

▶ Вынесем в левой части уравнения множитель x за скобки. Получим

$$(b-3)x = b^3 - 3b^2 + 4b - 12.$$

Мы имеем линейное уравнение, число корней которого зависит от того, отличен ли от нуля коэффициент при x или равен нулю. Если $b - 3 \neq 0$, т. е. $b \neq 3$, то уравнение имеет единственный корень

$$x = \frac{b^3 - 3b^2 + 4b - 12}{b-3}.$$

Разложив числитель дроби на множители, получим, что

$$x = \frac{(b-3)(b^2+4)}{b-3}.$$

Отсюда

$$x = b^2 + 4.$$

Если $b - 3 = 0$, т. е. $b = 3$, то уравнение принимает вид $0x = 0$. В этом случае любое число является корнем уравнения.

Итак, мы нашли, что при $b \neq 3$ уравнение имеет единственный корень $b^2 + 4$, а при $b = 3$ любое число является корнем уравнения. ◁

Пример 2. Решим уравнение

$$ax^2 + (a^2 - 1)x + (a-1)^2 = 0$$

с параметром a.

▶ Данное уравнение при $a = 0$ является линейным, а при $a \neq 0$ — квадратным. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если $a = 0$, то данное уравнение обращается в линейное уравнение $-x + 1 = 0$, которое имеет единственный корень $x = 1$.

Пусть $a \neq 0$. Тогда мы имеем квадратное уравнение

$$ax^2 + (a^2 - 1)x - (a-1)^2 = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$D = (a^2 - 1)^2 - 4a(a-1)^2 = (a-1)^2((a+1)^2 - 4a) = (a-1)^4.$$

Так как $D \geqslant 0$ при любом значении a, то это уравнение при любом a имеет корни.

Если $a = 1$, то $D = 0$, и это уравнение имеет единственный корень. Найти его можно, подставив в уравнение вместо a число 1. Получим $x^2 = 0$. Отсюда $x = 0$.

Если $a \neq 1$, то $D > 0$, и уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{1 - a^2 - (a-1)^2}{2a} = \frac{-2a^2 + 2a}{2a} = 1 - a,$$

$$x_2 = \frac{1 - a^2 + (a-1)^2}{2a} = \frac{-2a + 2}{2a} = \frac{1-a}{a}.$$

Итак, мы нашли, что данное уравнение имеет корень 1 при $a = 0$, корень 0 при $a = 1$, корни $1 - a$ и $\frac{1-a}{a}$ при $a \neq 0$ и $a \neq 1$. ◁

Упражнения

640. Какие случаи надо выделить при решении уравнения с параметром $bx + 2x = 3b + 6$? Найдите корни уравнения в каждом из этих случаев.

641. Решите относительно y уравнение:
а) $py - p - 1 = 0$; б) $py - 3y - 4p + 12 = 0$.

642. Решите уравнение с параметром a:

$$ax - 2x = a^3 - 2a^2 - 9a + 18.$$

643. Решите уравнение с параметром b:

$$2x^2 - 4x + b = 0.$$

644. Решите относительно x уравнение:
а) $x^2 - 5ax + 4a^2 = 0$; б) $3x^2 - 10ax + 3a^2 = 0$.

645. При каких значениях параметра t имеет единственный корень уравнение:
а) $3x^2 + tx + 3 = 0$; в) $tx^2 - 6x + 1 = 0$;
б) $2x^2 - tx + 50 = 0$; г) $tx^2 + x - 2 = 0$?

646. Выясните, при каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

принимает наименьшее значение, и найдите это значение.

647. Решите относительно x уравнение

$$(a-1)x^2 + 2ax + a + 1 = 0.$$

648. Решите уравнение с параметром k:

$$x^2 - (4k+1)x + 2(2k^2 + k - 3) = 0.$$

649. Выясните, при каких значениях параметра b равна 7 сумма корней уравнения

$$y^2 - (2b-1)y + b^2 - b - 2 = 0.$$

Дополнительные упражнения к главе III

К параграфу 8

650. Решите уравнение:

а) $(x+2)^2+(x-3)^2=13$;

б) $(3x-5)^2-(2x+1)^2=24$;

в) $(x-4)(x^2+4x+16)+28=x^2(x-25)$;

г) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-1=1{,}6x^2(5x-2)$.

651. Решите относительно x уравнение:

а) $x^2=a$; б) $x^2=a^2$; в) $x^2+4b=0$; г) $x^2+9b^2=0$.

652. Докажите, что при любом значении переменной значение выражения положительно:

а) $a^2+4a+11$; в) $m^2-4m+51$;

б) $\dfrac{x^2-2x+7}{19}$; г) $\dfrac{p^2-6p+18}{p^2+1}$.

653. Используя выделение квадрата двучлена:

а) докажите, что наименьшим значением выражения $x^2-8x+27$ является число 11;

б) найдите наименьшее значение выражения $a^2-4a+20$.

654. Решите уравнение:

а) $4x^2+7x+3=0$; д) $8x^2+x-75=0$;

б) $x^2+x-56=0$; е) $3x^2-11x-14=0$;

в) $x^2-x-56=0$; ж) $3x^2+11x-34=0$;

г) $5x^2-18x+16=0$; з) $x^2-x-1=0$.

655. При каких значениях x верно равенство:

а) $(5x+3)^2=5(x+3)$; д) $(5x+3)^2=5x+3$;

б) $(3x+10)^2=3(x+10)$; е) $(5x+3)^2=(3x+5)^2$;

в) $(3x-8)^2=3x^2-8x$; ж) $(4x+5)^2=4(x+5)^2$;

г) $(4x+5)^2=5x^2+4x$; з) $(2x+10)^2=4(x+5)^2$?

656. Решите уравнение и выполните проверку:

а) $x^2-2x-5=0$; г) $5y^2-7y+1=0$;

б) $x^2+4x+1=0$; д) $2y^2+11y+10=0$;

в) $3y^2-4y-2=0$; е) $4x^2-9x-2=0$.

657. Найдите приближенные значения корней уравнения в виде десятичных дробей с точностью до 0,01:

а) $x^2-2x-2=0$; в) $3x^2-7x+3=0$;

б) $x^2+5x+3=0$; г) $5x^2+31x+20=0$.

658. Выясните, при каких значениях переменной:

а) трехчлен $a^2 + 7a + 6$ и двучлен $a + 1$ принимают равные значения;

б) трехчлены $3x^2 - x + 1$ и $2x^2 + 5x - 4$ принимают равные значения.

Найдите эти значения.

659. При каком значении a один из корней уравнения $ax^2 - 3x - 5 = 0$ равен 1? Найдите, чему равен при этом значении a второй корень.

660. Найдите пять последовательных целых чисел, если известно, что сумма квадратов трех первых чисел равна сумме квадратов двух последних.

661. Найдите три последовательных четных числа, если известно, что сумма квадратов первых двух чисел равна квадрату третьего числа.

662. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 112. Найдите эти числа.

663. Периметр прямоугольника равен 28 см, а сумма площадей квадратов, построенных на двух смежных сторонах прямоугольника, равна 116 см^2. Найдите стороны прямоугольника.

664. Фотографическая карточка размером 12×18 см наклеена на лист так, что получилась рамка одинаковой ширины. Определите ширину рамки, если известно, что фотокарточка вместе с рамкой занимает площадь 280 см^2.

665. Цветочная клумба, имеющая форму прямоугольника, окружена дерновым бордюром, ширина которого всюду одинакова. Клумба вместе с бордюром образует прямоугольник, длина которого 4,5 м, а ширина 2,5 м. Найдите ширину бордюра, если известно, что его площадь равна 3,25 м^2.

666. *Старинная задача.* Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этом он потерял столько процентов, сколько стоила сама лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

667. Дно ящика — прямоугольник, ширина которого в 2 раза меньше его длины. Высота ящика 0,5 м. Найдите объем ящика, если известно, что площадь его дна на 1,08 м^2 меньше площади боковых стенок.

668. Имеется лист картона прямоугольной формы, длина которого в 1,5 раза больше его ширины. Из него можно изготовить открытую коробку объемом 6080 см^3, вырезав по углам картона квадраты со стороной 8 см. Найдите размеры — длину и ширину листа картона.

669. Разность кубов двух последовательных натуральных чисел равна 919. Найдите эти числа.

670. Разность кубов двух последовательных нечетных натуральных чисел равна 866. Найдите эти числа.

671. Решите уравнение и выполните проверку по теореме, обратной теореме Виета:

а) $x^2 - 5\sqrt{2}x + 12 = 0$; в) $y^2 - 6y + 7 = 0$;

б) $x^2 + 2\sqrt{3}x - 72 = 0$; г) $p^2 - 10p + 7 = 0$.

672. Найдите b и решите уравнение:

а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, если оно имеет корень 5;

б) $3x^2 + bx + 24 = 0$, если оно имеет корень 3;

в) $(b - 1)x^2 - (b + 1)x = 72$, если оно имеет корень 3;

г) $(b - 5)x^2 - (b - 2)x + b = 0$, если оно имеет корень $\frac{1}{2}$.

673. Докажите, что уравнение $7x^2 + bx - 23 = 0$ при любых значениях b имеет один положительный и один отрицательный корень.

674. Докажите, что уравнение $12x^2 + 70x + a^2 + 1 = 0$ при любых значениях a не имеет положительных корней.

675. Докажите, что если сумма коэффициентов квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна нулю, то один из корней уравнения равен 1. Используя это свойство, решите уравнение:

а) $2x^2 - 41x + 39 = 0$; б) $17x^2 + 243x - 260 = 0$.

676. Разность корней уравнения $3x^2 + bx + 10 = 0$ равна $4\frac{1}{3}$. Найдите b.

677. Один из корней уравнения $5x^2 - 12x + c = 0$ в 3 раза больше другого. Найдите c.

678. Частное корней уравнения $4x^2 + bx - 27 = 0$ равно -3. Найдите b.

679. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 90 = 0$ равен 81. Найдите p.

680. Разность квадратов корней уравнения $2x^2 - 5x + c = 0$ равна 0,25. Найдите c.

681. Один из корней уравнения $4x^2 + bx + c = 0$ равен 0,5, а другой — свободному члену. Найдите b и c.

682. Известно, что коэффициенты b и c уравнения $x^2 + bx + c = 0$, где $c \neq 0$, являются его корнями. Найдите b и c.

683. Выразите через p и q сумму квадратов корней уравнения $x^2 + px + q = 0$.

684. Известно, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 15x + q = 0$ равна 153. Найдите q.

685. Квадрат разности корней уравнения $x^2 + px + 405 = 0$ равен 144. Найдите p.

686. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2 + 2x + k = 0$, причем $2x_1 = -3x_2$. Найдите k.

687. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + k = 0$, причем $3x_1 + 4x_2 = 29$. Найдите k.

688. Зная, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2, составьте квадратное уравнение, имеющее корни:
а) $3x_1$ и $3x_2$; б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

689. Известно, что уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{x_1}{x_2}$ и $\frac{x_2}{x_1}$.

К параграфу 9

690. Решите уравнение:

а) $\frac{x+1}{6} + \frac{20}{x-1} = 4$;

б) $\frac{x+15}{4} - \frac{21}{x+2} = 2$;

в) $\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$;

г) $\frac{16}{x-3} + \frac{30}{1-x} = 3$;

д) $\frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{28}{1-x^2}$;

е) $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$;

ж) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+3}{x-2} = \frac{29}{(x+1)(x-2)}$;

з) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{(x+3)(x-1)}$.

691. Найдите координаты точек пересечения с осью x графика функции, заданной формулой:

а) $y = \frac{2x-5}{x+3}$;

б) $y = \frac{(x-4)(3x-15)}{x-9}$;

в) $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$;

г) $y = \frac{x^3-7x^2+12x}{x-3}$.

692. При каком значении x:

а) значение функции $y = \frac{5x-7}{x^2+1}$ равно -6; 0; 0,8; 0,56;

б) значение функции $y = \frac{x^2-2x+6}{x+4}$ равно 1,5; 3; 7?

693. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $y = 2x + 3$ и $y = \dfrac{34}{x - 5}$; б) $y = \dfrac{x^2 - 5x}{x + 3}$ и $y = 2x$.

694. Решите графически уравнение:

а) $\dfrac{6}{|x|} = 1{,}5x - 2$; б) $\dfrac{8}{|x|} = x^2$.

695. Решите уравнение:

а) $\dfrac{2x + 1}{2x - 1} - \dfrac{3(2x - 1)}{7(2x + 1)} + \dfrac{8}{1 - 4x^2} = 0$;

б) $\dfrac{y}{y^2 - 9} - \dfrac{1}{y^2 + 3y} + \dfrac{3}{6y + 2y^2} = 0$;

в) $\dfrac{2y - 1}{14y^2 + 7y} + \dfrac{8}{12y^2 - 3} = \dfrac{2y + 1}{6y^2 - 3y}$;

г) $\dfrac{3}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{9 - 6x + x^2} = \dfrac{3}{2x^2 + 6x}$;

д) $\dfrac{9x + 12}{x^3 - 64} - \dfrac{1}{x^2 + 4x + 16} = \dfrac{1}{x - 4}$;

е) $\dfrac{3}{8y^3 + 1} - \dfrac{1}{2y + 1} = \dfrac{y + 3}{4y^2 - 2y + 1}$;

ж) $\dfrac{32}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \dfrac{1}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{1}{x + 1}$;

з) $\dfrac{1}{3(x - 4)} + \dfrac{1}{2(x^2 + 3)} + \dfrac{1}{x^3 - 4x^2 + 3x - 12} = 0$.

696. Найдите корни уравнения:

а) $\dfrac{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \dfrac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \dfrac{10x}{3x^2 - 2}$;

б) $\dfrac{1 - y\sqrt{5}}{1 + y\sqrt{5}} + \dfrac{1 + y\sqrt{5}}{1 - y\sqrt{5}} = \dfrac{9y}{1 - 5y^2}$.

697. Найдите значения переменной y, при которых:

а) сумма дробей $\dfrac{6}{y + 1}$ и $\dfrac{y}{y - 2}$ равна их произведению;

б) сумма дробей $\dfrac{2}{y - 3}$ и $\dfrac{6}{y + 3}$ равна их частному;

в) разность дробей $\dfrac{y + 12}{y - 4}$ и $\dfrac{y}{y + 4}$ равна их произведению.

698. На перегоне в 600 км после прохождения $\frac{1}{4}$ пути поезд был задержан на 1 ч 30 мин. Чтобы прийти на конечную станцию вовремя, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч. Сколько времени поезд был в пути?

699. Туристы совершили три перехода в 12,5 км, 18 км и 14 км, причем скорость на первом переходе была на 1 км/ч меньше скорости на втором переходе и на столько же больше скорости на третьем. На третий переход они затратили на 30 мин больше, чем на второй. Сколько времени заняли все переходы?

700. Автомобиль прошел с некоторой постоянной скоростью путь от A до B длиной 240 км. Возвращаясь обратно, он прошел половину пути с той же скоростью, а затем увеличил ее на 10 км/ч. В результате на обратный путь было затрачено на $\frac{2}{5}$ ч меньше, чем на путь от A до B. С какой скоростью шел автомобиль из A в B?

701. Расстояние от A до B, равное 400 км, поезд прошел с некоторой постоянной скоростью; $\frac{2}{5}$ обратного пути из B в A он шел с той же скоростью, а потом уменьшил скорость на 20 км/ч. Найдите скорость поезда на последнем участке, если на всю дорогу было затрачено 11 ч.

702. Турист проехал на моторной лодке вверх по реке 25 км, а обратно спустился на плоту. В лодке он плыл на 10 ч меньше, чем на плоту. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде 12 км/ч.

703. Моторная лодка прошла 35 км вверх по реке и на 18 км поднялась по ее притоку, затратив на весь путь 8 ч. Скорость течения в реке на 1 км/ч меньше скорости течения в ее притоке. Найдите скорость течения в реке, если скорость лодки в стоячей воде 10 км/ч.

704. Из пункта A отправили по течению плот. Вслед за ним через 5 ч 20 мин из того же пункта вышел катер и догнал плот, пройдя 20 км. Сколько километров в час проходил плот, если катер шел быстрее его на 12 км/ч?

$\boxed{\textbf{705.}}$ Рыболов отправился на лодке от пункта N вверх по реке. Проплыв 6 км, он бросил весла, и через 4 ч 30 мин после отправления из N течение снова отнесло его к пункту N. Зная, что скорость лодки в стоячей воде 90 м/мин, найдите скорость течения реки.

706. Через 2 ч 40 мин после отправления плота от пристани A вниз по течению реки навстречу ему от пристани B отошел катер. Встреча произошла в 27 км от B. Найдите скорость плота, если скорость катера в стоячей воде 12 км/ч и расстояние от A до B равно 44 км.

707. Теплоход отправился от пристани A до пристани B, расстояние между которыми 225 км. Через 1,5 ч после отправления он был задержан на $\frac{1}{2}$ ч и, чтобы прийти вовремя, увеличил скорость на 10 км/ч. Найдите первоначальную скорость теплохода.

708. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, вышли одновременно два автомобиля. Первый из них ехал все время с постоянной скоростью. Второй автомобиль первые $\frac{3}{4}$ ч ехал с той же скоростью, затем сделал остановку на 15 мин, после этого увеличил скорость на 5 км/ч и прибыл в B вместе с первым. Найдите скорость первого автомобиля.

709. Автобус проехал расстояние между пунктами A и B, равное 400 км, с некоторой постоянной скоростью. Возвращаясь обратно, он 2 ч ехал с той же скоростью, а затем увеличил скорость на 10 км/ч и возвратился в пункт A, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем на путь из A в B. Сколько времени затратил автобус на обратный путь?

710. Мотоциклист ехал из одного города в другой 4 ч. На обратном пути первые 100 км он ехал с той же скоростью, а затем уменьшил ее на 10 км/ч и поэтому на обратный путь затратил на 30 мин больше. Найдите расстояние между городами.

711. Из двух городов A и B выходят одновременно два автомобиля и встречаются через 5 ч. Скорость автомобиля, выходящего из A, на 10 км/ч меньше скорости другого автомобиля. Если бы первый автомобиль вышел из A на $4\frac{1}{2}$ ч раньше второго, то встреча произошла бы в 150 км от B. Найдите расстояние между городами A и B.

712. Расстояние от пристани M до пристани N по течению реки катер проходит за 6 ч. Однажды, не дойдя 40 км до пристани N, катер повернул назад и возвратился к пристани M, затратив на весь путь 9 ч. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

713. Мотоциклист проехал расстояние от пункта M до пункта N за 5 ч. На обратном пути он первые 36 км ехал с той же скоростью, а остальную часть пути — со скоростью, на 3 км/ч большей. С какой скоростью ехал мотоциклист первоначально, если на обратный путь он затратил на 15 мин меньше, чем на путь из M в N?

714. Отец и сын прошли 240 м, при этом отец сделал на 100 шагов меньше, чем сын. Найдите длину шага каждого из них, если шаг отца длиннее шага сына на 20 см.

715. Первая мастерская должна была сшить 160 костюмов, а вторая за тот же срок — на 25% меньше. Первая мастерская шила в день на 10 костюмов больше, чем вторая, и выполнила задание за 2 дня до намеченного срока. Сколько костюмов в день шила вторая мастерская, если ей для выполнения задания понадобилось дополнительно 2 дня?

716. Бригада рабочих должна была за определенный срок изготовить 768 пылесосов. Первые 5 дней бригада выполняла ежедневно установленную норму, а затем каждый день изготовляла на 6 пылесосов больше, чем намечалось, поэтому уже за день до срока было изготовлено 844 пылесоса. Сколько пылесосов в день должна была изготовлять бригада по плану?

717. Масса двух сплавов меди и олова равна 60 кг. Первый сплав содержит 6 кг меди, а второй — 3,6 кг меди. Найдите массу каждого сплава, если известно, что содержание меди в первом сплаве на 15% больше, чем во втором.

718. Сплав меди с цинком, содержащий 6 кг цинка, сплавили с 13 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось на 26%. Какова была первоначальная масса сплава?

719. За 4 дня совместной работы двумя тракторами было вспахано $\frac{2}{3}$ поля. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором, если первым его можно вспахать на 5 дней быстрее, чем вторым?

720. Два хлопкоуборочных комбайна могут собрать хлопок с поля на 9 дней быстрее, чем один первый комбайн, и на 4 дня быстрее, чем один второй. За сколько дней каждый комбайн может собрать весь хлопок?

721. Для наполнения бассейна через первую трубу потребуется на 9 ч больше времени, чем при наполнении через первую и вторую трубы, и на 7 ч меньше, чем через одну вторую трубу. За сколько часов наполнится бассейн через обе трубы?

722. Два слесаря получили заказ. Сначала 1 ч работал первый слесарь, затем 4 ч они работали вместе. В результате было выполнено 40% заказа. За сколько часов мог выполнить заказ каждый слесарь, если первому для этого понадобилось бы на 5 ч больше, чем второму?

723. При совместной работе двух копировальных машин можно снять ксерокопию с рукописи за 6 мин. Если сначала снять ксерокопию с половины рукописи одной машиной, а затем с оставшейся части — другой машиной, то вся работа будет закончена через 12,5 мин. За какое время можно снять ксерокопию с рукописи каждой машиной в отдельности?

Глава IV НЕРАВЕНСТВА

§ 10 ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА

28. Числовые неравенства

Мы можем сравнить любые числа a и b и результат сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя знаки $=$, $<$, $>$. Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Рассмотрим примеры.

1. Сравним обыкновенные дроби $\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$. Для этого приведем их к общему знаменателю:

$$\frac{5}{8} = \frac{35}{56}; \quad \frac{4}{7} = \frac{32}{56}.$$

Так как $35 > 32$, то $\frac{5}{8} > \frac{4}{7}$.

2. Сравним десятичные дроби 3,6748 и 3,675. Цифры в разрядах единиц, десятых и сотых совпадают, а в разряде тысячных в первой дроби стоит цифра 4, а во второй — цифра 5. Так как $4 < 5$, то $3{,}6748 < 3{,}675$.

3. Сравним обыкновенную дробь $\frac{9}{20}$ и десятичную дробь 0,45. Обратив дробь $\frac{9}{20}$ в десятичную, получим, что $\frac{9}{20} = 0{,}45$.

4. Сравним отрицательные числа -15 и -23. Модуль первого числа меньше модуля второго. Значит, первое число больше второго, т. е. $-15 > -23$.

В зависимости от конкретного вида чисел мы использовали тот или иной способ сравнения. Однако удобно иметь такой способ сравнения чисел, который охватывает все случаи. Он заключается в том, что составляют разность чисел и выясняют, является ли она положительным числом, отрицательным числом или нулем. Этот способ сравнения чисел основан на следующем определении:

Определение. Число a больше числа b, если разность $a - b$ — положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ — отрицательное число.

Заметим, что если разность $a - b$ равна нулю, то числа a и b равны.

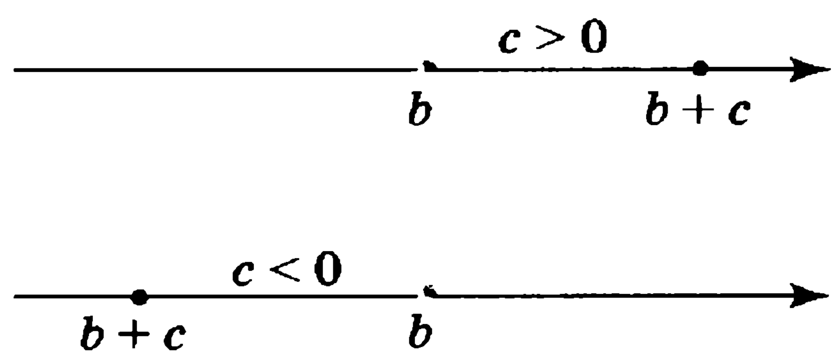


Рис. 22

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее — точкой, лежащей левее. Действительно, пусть a и b — некоторые числа. Обозначим разность $a - b$ буквой c. Так как $a - b = c$, то $a = b + c$. Если c — положительное число, то точка с координатой $b + c$ лежит правее точки с координатой b, а если c — отрицательное число, то левее (рис. 22). Значит, если $a > b$, то точка с координатой a лежит правее точки с координатой b, а если $a < b$ — левее.

Покажем, как приведенное определение используется при решении задач.

Пример 1. Докажем, что при любых значениях переменной a верно неравенство

$$(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2.$$

► Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$(a - 3)(a - 5) - (a - 4)^2 = a^2 - 3a - 5a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1.$$

При любом a рассматриваемая разность отрицательна и, следовательно, верно неравенство $(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2$.

Пример 2. Пусть a и b — положительные числа. Как известно, число $\frac{a + b}{2}$ называется средним арифметическим чисел a и b, число $\sqrt{ab}$ — средним геометрическим, число $\dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ — средним гармоническим. Докажем, что среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое положительных чисел a и b связаны следующим соотношением:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

▶ Докажем сначала, что $\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. Преобразуем разность левой и правой частей этого неравенства:

$$\sqrt{ab} - \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{a\sqrt{ab} + b\sqrt{ab} - 2ab}{a+b} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}\,(a + b - 2\sqrt{ab})}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ рассматриваемая разность неотрицательна и, следовательно, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Рассмотрим теперь разность $\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2}$:

$$\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{2\sqrt{ab} - a - b}{2} = -\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}.$$

При $a > 0$ и $b > 0$ составленная разность либо является отрицательным числом, либо равна нулю и, значит, верно неравенство

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

Итак, мы доказали, что если $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}. \ \triangleleft$$

Упражнения

724. Сравните числа a и b, если:
а) $a - b = -0{,}001$; б) $a - b = 0$; в) $a - b = 4{,}3$.

725. Известно, что $a < b$. Может ли разность $a - b$ выражаться числом 3,72? −5? 0?

726. Даны выражения $3a(a+6)$ и $(3a+6)(a+4)$. Сравните их значения при $a=-5$; 0; 40. Докажите, что при любом a значение первого выражения меньше значения второго.

727. Даны выражения $4b(b+1)$ и $(2b+7)(2b-8)$. Сравните их значения при $b=-3$; -2; 10. Можно ли утверждать, что при любом значении b значение первого выражения больше, чем значение второго?

728. Докажите, что при любом значении переменной верно неравенство:

а) $3(a+1)+a<4(2+a)$;
б) $(7p-1)(7p+1)<49p^2$;
в) $(a-2)^2>a(a-4)$;
г) $(2a+3)(2a+1)>4a(a+2)$.

729. Докажите неравенство:

а) $2b^2-6b+1>2b(b-3)$;
б) $(c+2)(c+6)<(c+3)(c+5)$;
в) $p(p+7)>7p-1$;
г) $8y(3y-10)<(5y-8)^2$.

730. Верно ли при любом x неравенство:

а) $4x(x+0{,}25)>(2x+3)(2x-3)$;
б) $(5x-1)(5x+1)<25x^2+2$;
в) $(3x+8)^2>3x(x+16)$;
г) $(7+2x)(7-2x)<49-x(4x+1)$?

731. Докажите неравенство:

а) $a(a+b)\geqslant ab$;
б) $m^2-mn+n^2\geqslant mn$;
в) $2bc\leqslant b^2+c^2$;
г) $a(a-b)\geqslant b(a-b)$.

732. Докажите, что при любом a верно неравенство:

а) $10a^2-5a+1\geqslant a^2+a$;
б) $a^2-a\leqslant 50a^2-15a+1$.

733. Докажите, что при $a>0$ верно неравенство $\dfrac{a+2}{a}-2\geqslant 2-\dfrac{a+2}{2}$.

734. Докажите, что сумма любого положительного числа и числа, ему обратного, не меньше чем 2.

735. Докажите неравенство:

а) $\dfrac{c^2+1}{2}\geqslant c$;
б) $\dfrac{c}{c^2+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

736. Используя выделение квадрата двучлена, докажите неравенство:

а) $a^2-6a+14>0$;
б) $b^2+70>16b$.

737. Выберите из данных неравенств такое, которое не является верным при любом значении a.

1. $a^2>2a-3$ 2. $a^2+6>4a$ 3. $4a-4<a^2$ 4. $8a-70<a^2$

738. Докажите, что если a и b — положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$. Пользуясь этим свойством, сравните числа:

а) $\sqrt{6}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}+\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5}-2$ и $\sqrt{6}-\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{3}+2$ и $\sqrt{6}+1$; г) $\sqrt{10}-\sqrt{7}$ и $\sqrt{11}-\sqrt{6}$.

739. Докажите, что при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ верно неравенство

$$\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

740. Что больше: a^3+b^3 или $ab(a+b)$, если a и b — неравные положительные числа?

741. К каждому из чисел 0, 1, 2, 3 прибавили одно и то же число k. Сравните произведение крайних членов получившейся последовательности чисел с произведением средних ее членов.

742. Одноклассники Коля и Миша вышли одновременно из поселка на станцию. Коля шел со скоростью 5 км/ч, а Миша первую половину пути шел со скоростью, на 0,5 км/ч большей, чем Коля, а вторую половину пути — со скоростью, на 0,5 км/ч меньшей, чем Коля. Кто из них первым пришел на станцию?

743. Найдите значение дроби $\dfrac{x^2-6x+3}{x+2}$ при $x=-\dfrac{1}{3}$.

744. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2-10x+25}{35-7x}$; б) $\dfrac{4x^2-12x+9}{(3-2x)^2}$.

745. Решите уравнение:

а) $\dfrac{5}{x}=2-\dfrac{3}{x-2}$; б) $\dfrac{3}{2x-1}=5x-9$.

29. Свойства числовых неравенств

Рассмотрим некоторые свойства числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 1

Если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$.

● Действительно, если разность $a-b$ — положительное число, то разность $b-a$ — отрицательное число, и наоборот. ○

ТЕОРЕМА 2

Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

● Докажем, что разность $a - c$ — отрицательное число. Прибавим к этой разности числа b и $-b$ и сгруппируем слагаемые:

$$a - c = a - c + b - b = (a - b) + (b - c).$$

По условию $a < b$ и $b < c$. Поэтому слагаемые $a - b$ и $b - c$ — отрицательные числа. Значит, и их сумма является отрицательным числом. Следовательно, $a < c$. Аналогично доказывается, что если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Геометрическая иллюстрация этих свойств дана на рисунке 23.

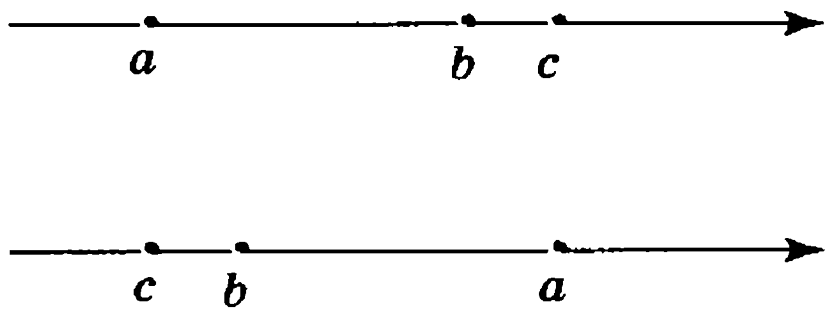


Рис. 23

ТЕОРЕМА 3

Если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$.

● Преобразуем разность $(a + c) - (b + c)$:

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

По условию $a < b$, поэтому $a - b$ — отрицательное число. Значит, и разность $(a + b) - (b + c)$ отрицательна. Следовательно, $a + c < b + c$. ○

Итак,

если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

АРХИМЕД (287—212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик и механик. Разработал новые математические методы, в частности указал способ, позволяющий записать любое сколь угодно большое число. Дал образцы применения математики к задачам естествознания и техники.

ТЕОРЕМА 4

Если $a < b$ и c — положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c — отрицательное число, то $ac > bc$.

● Представим разность $ac - bc$ в виде произведения:

$$ac - bc = c(a - b).$$

Так как $a < b$, то $a - b$ — отрицательное число. Если $c > 0$, то произведение $c(a - b)$ отрицательно, и, следовательно, $ac < bc$. Если $c < 0$, то произведение $c(a - b)$ положительно, и, следовательно, $ac > bc$. ○

Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичное свойство справедливо и для деления. Итак,

если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство;
если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

СЛЕДСТВИЕ

Если a и b — положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

● Разделим обе части неравенства $a < b$ на положительное число ab: $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$. Сократив дроби, получим, что $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, т. е. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. ○

Приведем пример использования рассмотренных свойств неравенств.

Пример. Оценим периметр равностороннего треугольника со стороной a мм, если известно, что $54{,}2 < a < 54{,}3$.

▶ Периметр равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $P = 3a$. Умножим на 3 обе части каждого из неравенств $54{,}2 < a$ и $a < 54{,}3$ и запишем результат в виде двойного неравенства:

$$54{,}2 \cdot 3 < 3a < 54{,}3 \cdot 3, \quad 162{,}6 < 3a < 162{,}9.$$

Значит, периметр P данного треугольника больше 162,6 мм, но меньше 162,9 мм. ◁

Упражнения

746. Начертите координатную прямую и покажите, где примерно расположены на ней точки, имеющие координаты a, b, c, d и e, если $a < b$, $c > b$, $c < d$, $a > e$.

747. Пусть m, n, p и q — некоторые числа, причем $m > p$, $n > m$, $n < q$. Сравните, если это возможно, числа p и n, p и q, q и m. При сравнении чисел воспользуйтесь координатной прямой.

748. Известно, что $a < b$. Сравните, если возможно, a и $b+1$, $a-3$ и b, $a-5$ и $b+2$, $a+4$ и $b-1$.

749. Какими числами (положительными, отрицательными) являются a и b, если известно, что верны неравенства:

а) $a-3 > b-3$ и $b > 4$;
б) $a-8 > b-8$ и $a < -12$;
в) $7a > 7b$ и $b > \frac{1}{2}$;
г) $-2a > -2b$ и $b < -\frac{1}{3}$?

750. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства $18 > -7$ прибавить число -5; число 2,7; число 7;

б) из обеих частей неравенства $5 > -3$ вычесть число 2; число 12; число -5;

в) обе части неравенства $-9 < 21$ умножить на 2; на -1; на $-\frac{1}{3}$;

г) обе части неравенства $15 > -6$ разделить на 3; на -3; на -1.

751. Известно, что $a < b$. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям этого неравенства прибавить число 4;
б) из обеих частей этого неравенства вычесть число 5;
в) обе части этого неравенства умножить на 8;
г) обе части этого неравенства разделить на $\frac{1}{3}$;
д) обе части этого неравенства умножить на $-4{,}8$;
е) обе части этого неравенства разделить на -1.

752. Известно, что $a < b$. Поставьте вместо звездочки знак $<$ или $>$ так, чтобы получилось верное неравенство:

а) $-12{,}7a * -12{,}7b$;
б) $\frac{a}{3} * \frac{b}{3}$;
в) $0{,}07a * 0{,}07b$;
г) $-\frac{a}{2} * -\frac{b}{2}$.

753. Каков знак числа a, если известно, что:

а) $5a < 2a$; б) $7a > 3a$; в) $-3a < 3a$; г) $-12a > -2a$?

754. Известно, что $c > d$. Объясните, на основании каких свойств можно утверждать, что верно неравенство:

а) $-7c < -7d$;
б) $\frac{c}{8} > \frac{d}{8}$;
в) $2c + 11 > 2d + 11$;
г) $0{,}01c - 0{,}7 > 0{,}01d - 0{,}7$;
д) $1 - c < 1 - d$;
е) $2 - \frac{c}{2} < 2 - \frac{d}{2}$.

755. Известно, что a, b, c и d — положительные числа, причем $a > b$, $d < b$, $c > a$. Расположите в порядке возрастания числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$.

756. Зная, что a — отрицательное число, расположите в порядке возрастания числа:

$$2a,\ a\sqrt{3},\ a(\sqrt{3} - \sqrt{2}),\ -a\sqrt{7},\ 3a.$$

757. Известно, что $3 < a < 4$. Оцените значение выражения:

а) $5a$; б) $-a$; в) $a + 2$; г) $5 - a$; д) $0{,}2a + 3$.

758. Зная, что $5 < x < 8$, оцените значение выражения:

а) $6x$; б) $-10x$; в) $x - 5$; г) $3x + 2$.

759. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, оцените значение выражения:

а) $\sqrt{2} + 1$; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $2 - \sqrt{2}$.

760. Пользуясь тем, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$, оцените значение выражения:

а) $\sqrt{5} + 2$; б) $3 - \sqrt{5}$.

761. а) Оцените периметр квадрата со стороной a см, если $5{,}1 \leqslant a \leqslant 5{,}2$.

б) Оцените длину стороны квадрата, зная, что периметр квадрата равен P см, если $15{,}6 \leqslant P \leqslant 15{,}8$.

762. Оцените значение выражения $\frac{1}{y}$, если:

а) $5 < y < 8$; б) $0{,}125 < y < 0{,}25$.

763. Найдите значение многочлена $x^2 - 4x + 1$ при $x = \frac{1}{4}$; -3; $2 - \sqrt{3}$.

764. Решите уравнение:

а) $\frac{8x^2 - 3}{5} - \frac{5 - 9x^2}{4} = 2$;
б) $\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$;
в) $\frac{10}{x^2 - 4} - \frac{3}{2x - 4} = \frac{1}{2}$;
г) $x - \frac{x^2 - 17}{x - 3} = \frac{5}{x}$.

30. Сложение и умножение числовых неравенств

Рассмотрим теперь, как выполняется сложение и умножение числовых неравенств.

ТЕОРЕМА 5

Если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

● Прибавив к обеим частям неравенства $a < b$ число c, получим $a + c < b + c$. Прибавив к обеим частям неравенства $c < d$ число b, получим $b + c < b + d$. Из неравенств $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$ следует, что $a + c < b + d$. ○

Теорема справедлива и в случае почленного сложения более чем двух неравенств.

Таким образом,

если почленно сложить верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

ТЕОРЕМА 6

Если $a < b$ и $c < d$, где a, b, c и d — положительные числа, то $ac < bd$.

● Умножив обе части неравенства $a < b$ на положительное число c, получим $ac < bc$. Умножив обе части неравенства $c < d$ на положительное число b, получим $bc < bd$. Из неравенств $ac < bc$ и $bc < bd$ следует, что $ac < bd$. ○

Теорема справедлива и для почленного умножения более чем двух неравенств указанного вида.

Таким образом,

если почленно перемножить верные неравенства одного знака, левые и правые части которых — положительные числа, то получится верное неравенство.

Заметим, что если в неравенствах $a < b$ и $c < d$ среди чисел a, b, c и d имеются отрицательные, то неравенство $ac < bd$ может оказаться неверным. Так, перемножив почленно верные неравенства $-1 < 2$ и $-3 < 1$, получим неравенство $3 < 2$, которое не является верным.

6 Алгебра 8 кл.

СЛЕДСТВИЕ

Если числа a и b положительны и $a < b$, то $a^n < b^n$, где n — натуральное число.

- Перемножив почленно n верных неравенств $a < b$, в которых a и b — положительные числа, получим верное неравенство $a^n < b^n$.

Доказанные свойства используются для оценки суммы, разности, произведения и частного.

Пусть, например, известно, что $15 < x < 16$ и $2 < y < 3$. Требуется оценить сумму $x + y$, разность $x - y$, произведение xy и частное $\frac{x}{y}$.

1. Оценим сумму $x + y$.

Применив теорему о почленном сложении неравенств к неравенствам $15 < x$ и $2 < y$, а затем к неравенствам $x < 16$ и $y < 3$, получим $17 < x + y$ и $x + y < 19$. Результат можно записать в виде двойного неравенства $17 < x + y < 19$. Запись обычно ведут короче:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 17 < x + y < 19 \end{array}$$

2. Оценим разность $x - y$.

Для этого представим разность $x - y$ в виде суммы $x + (-y)$. Сначала оценим выражение $-y$. Так как $2 < y < 3$, то $-2 > -y > -3$, т. е. $-3 < -y < -2$. Применим теперь теорему о почленном сложении неравенств:

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ -3 < -y < -2 \\ \hline 12 < x - y < 14 \end{array}$$

3. Оценим произведение xy.

Так как каждое из чисел x и y заключено между положительными числами, то они также являются положительными числами. Применив теорему о почленном умножении неравенств, получим

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ 2 < y < 3 \\ \hline 30 < xy < 48 \end{array}$$

4. Оценим частное $\frac{x}{y}$.

Для этого представим частное $\frac{x}{y}$ в виде произведения $x \cdot \frac{1}{y}$. Сначала оценим выражение $\frac{1}{y}$. Так как $2 < y < 3$, то $\frac{1}{2} > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2}$. По теореме о почленном умножении неравенств имеем

$$\begin{array}{c} 15 < x < 16 \\ \frac{1}{3} < \frac{1}{y} < \frac{1}{2} \\ \hline 5 < \frac{x}{y} < 8 \end{array}$$

Упражнения

765. Сложите почленно неравенства:
а) $12 > -5$ и $9 > 7$; б) $-2{,}5 < -0{,}7$ и $-6{,}5 < -1{,}3$.

766. Перемножьте почленно неравенства:
а) $5 > 2$ и $4 > 3$; б) $8 < 10$ и $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

767. Верно ли для положительных чисел a и b, что:
а) если $a > b$, то $a^2 > b^2$; б) если $a^2 > b^2$, то $a > b$?

768. Пусть $3 < a < 4$ и $4 < b < 5$. Оцените:
а) $a + b$; б) $a - b$; в) ab; г) $\frac{a}{b}$.

769. Зная, что $6 < x < 7$ и $10 < y < 12$, оцените:
а) $x + y$; б) $y - x$; в) xy; г) $\frac{y}{x}$.

770. Пользуясь тем, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените:
а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

771. Пользуясь тем, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$, оцените:
а) $\sqrt{6} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

772. Известны границы длин основания a и боковой стороны b равнобедренного треугольника, выраженные в миллиметрах:

$$26 \leqslant a \leqslant 28 \text{ и } 41 \leqslant b \leqslant 43.$$

Оцените периметр этого треугольника.

773. Измеряя длину a и ширину b прямоугольника (в см), нашли, что $5{,}4 < a < 5{,}5$ и $3{,}6 < b < 3{,}7$.
Оцените: а) периметр прямоугольника; б) площадь прямоугольника.

774. Известны границы длины a и ширины b (в м) комнаты прямоугольной формы:

$$7{,}5 \leqslant a \leqslant 7{,}6 \text{ и } 5{,}4 \leqslant b \leqslant 5{,}5.$$

Подойдет ли это помещение для библиотеки, для которой требуется комната площадью не менее 40 $м^2$?

775. Пусть α и β — углы треугольника. Известно, что

$$58° \leqslant \alpha \leqslant 59°, \quad 102° \leqslant \beta \leqslant 103°.$$

Оцените величину третьего угла.

776. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, докажите, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ верно неравенство:
а) $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$;
б) $\dfrac{(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)}{16} \geqslant abc$.

777. Докажите, что сумма длин двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника меньше суммы длин его диагоналей.

778. Докажите, что сумма длин медиан треугольника больше его полупериметра, но меньше периметра.

779. Лист жести имеет форму квадрата. После того как от него отрезали полосу шириной 5 дм, площадь оставшейся части листа стала равной 6 $дм^2$. Каковы размеры первоначального листа жести?

780. Упростите выражение

$$\left(\frac{8x}{16-9x^2}+\frac{x}{3x-4}\right):\left(1-\frac{4-3x}{4+3x}\right).$$

781. Докажите, что:
а) $9a + \dfrac{1}{a} \geqslant 6$ при $a > 0$; б) $25b + \dfrac{1}{b} \leqslant -10$ при $b < 0$.

31. Погрешность и точность приближения

По графику функции $y = x^2$ нашли приближенные значения этой функции при $x = 1{,}5$ и $x = 2{,}1$:

если $x = 1{,}5$, то $y \approx 2{,}3$;

если $x = 2{,}1$, то $y \approx 4{,}4$.

По формуле $y = x^2$ можно найти точные значения этой функции:

если $x = 1{,}5$, то $y = 1{,}5^2 = 2{,}25$;

если $x = 2{,}1$, то $y = 2{,}1^2 = 4{,}41$.

Приближенное значение отличается от точного значения в первом случае на 0,05, а во втором на 0,01, так как:

$$2{,}3 - 2{,}25 = 0{,}05; \qquad 4{,}41 - 4{,}4 = 0{,}01.$$

Чтобы узнать, на сколько приближенное значение отличается от точного, надо из большего числа вычесть меньшее, т. е. найти модуль разности точного и приближенного значений. Этот модуль разности называют *абсолютной погрешностью.*

Определение. Абсолютной погрешностью приближенного значения называют модуль разности точного и приближенного значений.

Так, в рассмотренном примере абсолютная погрешность приближенного значения, равного 2,3, есть 0,05, а абсолютная погрешность приближенного значения, равного 4,4, есть 0,01:

$$|2{,}25 - 2{,}3| = |-0{,}05| = 0{,}05; \qquad |4{,}41 - 4{,}4| = 0{,}01.$$

Найти абсолютную погрешность не всегда возможно. Пусть, например, при измерении длины отрезка AB, изображенного на рисунке 24, получен результат:

$$AB \approx 4{,}3 \text{ см}.$$

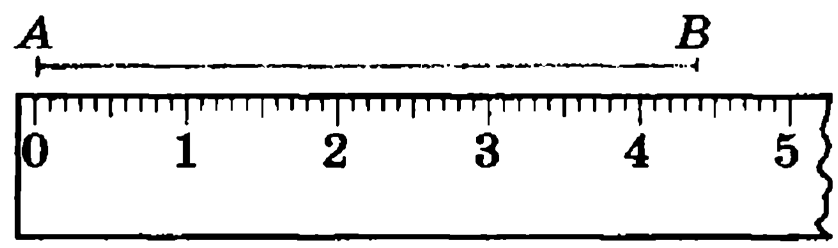
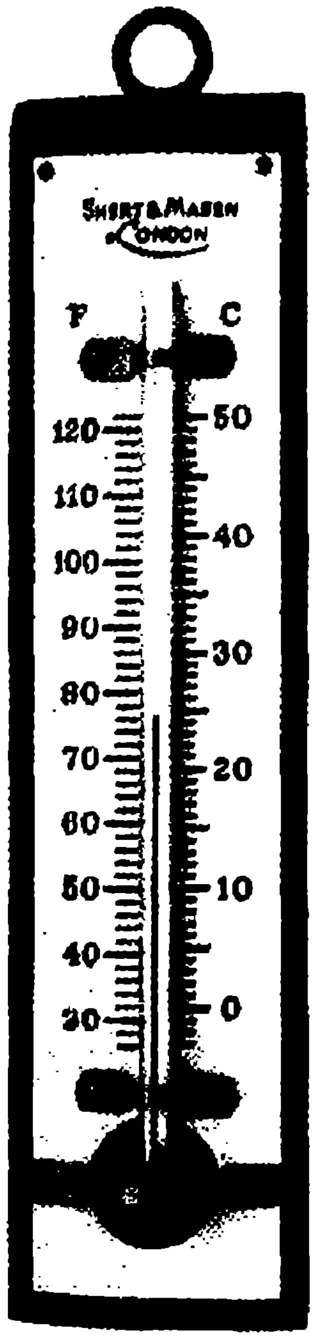


Рис. 24

Мы не можем найти абсолютную погрешность приближенного значения, так как не знаем точного значения длины отрезка AB. В подобных случаях важно указать такое число, больше которого абсолютная погрешность быть не может. В рассматриваемом примере в качестве такого числа можно взять число 0,1. В самом деле, цена деления линейки 0,1 см, и поэтому абсолютная погрешность приближенного значения, равного 4,3, не больше чем 0,1, т. е.

$$|AB - 4{,}3| \leqslant 0{,}1.$$



Говорят, что число 4,3 есть приближенное значение длины отрезка AB (в сантиметрах) с точностью до 0,1.

Вообще, если $x \approx a$ и абсолютная погрешность этого приближенного значения не превосходит некоторого числа h, то число a называют приближенным значением x с точностью до h. Пишут:

$$x \approx a \text{ с точностью до } h.$$

Используют также такую запись:

$$x = a \pm h.$$

Запись $x = a \pm h$ означает, что точное значение переменной x заключено между числами $a - h$ и $a + h$, т. е.

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h.$$

Например, на рулоне обоев написано, что его длина равна $18 \pm 0{,}3$ м. Значит, если l — истинное значение длины рулона (в метрах), то

$$18 - 0{,}3 \leqslant l \leqslant 18 + 0{,}3, \text{ т. е. } 17{,}7 \leqslant l \leqslant 18{,}3.$$

Точность приближенного значения зависит от многих причин. В частности, если приближенное значение получено в процессе измерения, его точность зависит от прибора, с помощью которого выполнялось измерение. Например, на медицинском термометре деления нанесены через 0,1°. Это дает возможность измерять температуру с точностью до 0,1°. Комнатный термометр, на котором деления нанесены через 1°, позволяет измерять температуру с точностью до 1°. На торговых весах, у которых цена деления шкалы 5 г, можно взвешивать с точностью до 5 г.

Для оценки качества измерения можно использовать *относительную погрешность* приближенного значения.

Определение. Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

Относительную погрешность принято выражать в процентах.

В тех случаях, когда абсолютная погрешность приближенного значения неизвестна, а известна только его точность, ограничиваются оценкой относительной погрешности.

Рассмотрим такой пример. При измерении (в сантиметрах) толщины b стекла и длины l книжной полки получили такие результаты:

$$b = 0{,}4 \pm 0{,}1; \qquad l = 100{,}0 \pm 0{,}1.$$

В первом случае относительная погрешность не превосходит $\frac{0,1}{0,4} \cdot 100\%$, т. е. 25%, а во втором не превосходит $\frac{0,1}{100} \cdot 100\%$, т. е. 0,1%. Говорят, что в первом случае измерение выполнено с относительной точностью до 25%, а во втором — с относительной точностью до 0,1%. Качество второго измерения намного выше, чем первого.

Упражнения

782. Округлите числа 17,26; 12,034; 8,654 до десятых и найдите абсолютную погрешность каждого из приближенных значений.

783. Найдите абсолютную погрешность приближенного значения, полученного в результате округления:

а) числа 9,87 до единиц;
б) числа 124 до десятков;
в) числа 0,453 до десятых;
г) числа 0,198 до сотых.

784. При выполнении вычислений дробь $\frac{1}{7}$ заменили десятичной дробью 0,14. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

785. В каких границах заключено число y, если:

а) $y = 6,5 \pm 0,1$; б) $y = 1,27 \pm 0,2$.

786. На упаковке простокваши написано, что ее надо хранить при температуре 4 ± 2 °C. В каких границах заключено значение температуры t °C, допустимое для хранения?

787. На упаковке товара указано, что его масса равна 420 г ± 3%. В каких границах заключена масса a г этого товара?

788. На коробке конфет указано, что она должна храниться при температуре 16 ± 3 °C. Удовлетворяет ли этому условию температура воздуха, равная:

а) 18°; б) 21°; в) 14,5°; г) 12,5°?

789. Определяя массу мешка картофеля с точностью до 1 кг, нашли, что она равна 32 кг. Может ли масса этого мешка, измеренная с точностью до 0,1 кг, оказаться равной:

а) 31,4; б) 32,5; в) 33,2; г) 30,7?

790. Начертите острый угол и измерьте его с помощью транспортира. Какова точность полученного результата?

791. При измерении длины стержня пользовались линейкой с миллиметровыми делениями, штангенциркулем (цена деления

0,1 мм) и микрометром (цена деления 0,01 мм). При этом были получены результаты: 17,9 мм, 18 мм, 17,86 мм. Каким инструментом выполнено каждое из указанных измерений и какую точность дает каждый инструмент?

792. Округлите число 2,525 до десятых. Найдите относительную погрешность приближения, полученного при округлении.

793. Выполняя лабораторную работу по определению плотности железа, ученик получил результат 7,6 г/см^3. Вычислите относительную погрешность экспериментального результата (табличное значение плотности железа равно 7,8 г/см^3).

794. Поверхность Земли равна 510,2 млн км^2 (с точностью до 0,1 млн км^2). Оцените относительную погрешность приближенного значения.

795. Измерили толщину человеческого волоса d и расстояние от Земли до Луны l. Получили $d \approx 0{,}15$ мм с точностью до 0,01 мм и $l \approx 384\ 000$ км с точностью до 500 км. Сравните качество измерений, оценив относительные погрешности.

796. Сравнивая с нулем значения выражений, ученик получил следующие результаты:

1. $3\sqrt{2} - \sqrt{7} > 0$ 3. $4\sqrt{7} - 9\sqrt{2} < 0$
2. $6\sqrt{3} - 3\sqrt{6} > 0$ 4. $7\sqrt{11} - 6\sqrt{12} < 0$

При этом он допустил ошибку. Найдите ее и исправьте.

797. Докажите неравенство:

а) $6a(a+1) < (3a+1)(2a+1) + a$;

б) $(2p-1)(2p+1) + 3(p+1) > (4p+3)p$.

798. Разность корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равна 16. Найдите q.

Контрольные вопросы

Сформулируйте теоремы, выражающие основные свойства числовых неравенств, и докажите их.

Сформулируйте и докажите теоремы о почленном сложении и умножении неравенств.

Что называется абсолютной погрешностью приближенного значения? Объясните смысл записи $x = a \pm h$.

Что называется относительной погрешностью приближенного значения?

§ 11 НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ИХ СИСТЕМЫ

32. Пересечение и объединение множеств

Пусть A — множество натуральных делителей числа 12, а B — множество натуральных делителей числа 18. Зададим множества A и B путем перечисления элементов:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\},$$
$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}.$$

Обозначим буквой C множество общих делителей чисел 12 и 18, т. е. общих элементов множеств A и B. Получим, что

$$C = \{1, 2, 3, 6\}.$$

Говорят, что множество C является пересечением множеств A и B, и пишут: $A \cap B = C$.

Вообще

пересечением двух множеств называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

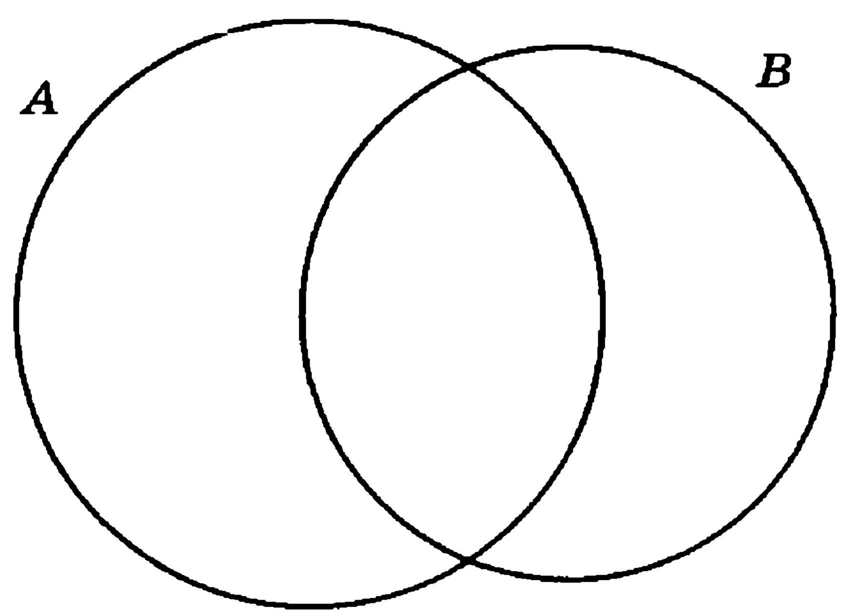


Рис. 25

Соотношение между множествами A, B и C можно проиллюстрировать с помощью специальных схем, называемых кругами Эйлера. На рисунке 25 множества A и B избражены кругами. Фигура, образовавшаяся при пересечении кругов, закрашенная на рисунке, изображает множество C.

Заметим, что если некоторые множества X и Y не имеют общих элементов, то говорят, что пересечением этих множеств является *пустое множество*, которое обозначают знаком $\varnothing$, и используют такую запись: $X \cap Y = \varnothing$.

Введем теперь понятие объединения множеств. Вернемся к рассмотренному примеру множеств натуральных делителей чисел 12 и 18. Пусть D — множество, которому принадлежат все элементы множества A и все элементы множества B. Для того чтобы задать

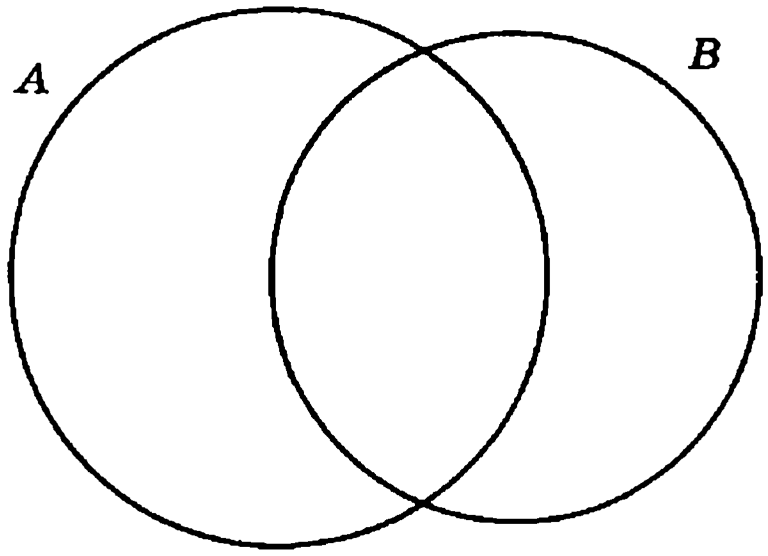


Рис. 26

множество D путем перечисления элементов, выпишем сначала все элементы множества A, а затем те элементы множества B, которые не принадлежат множеству A. Получим

$$D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 9, 18\}.$$

Говорят, что множество D является объединением множеств A и B, и пишут: $D = A \cup B$.

Вообще

объединением двух множеств называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств.

На рисунке 26 с помощью кругов Эйлера показано соотношение между множествами A, B и D. Фигура, закрашенная на рисунке, изображает множество D.

Упражнения

799. Известно, что X — множество простых чисел, не превосходящих 20, а Y — множество двузначных чисел, не превосходящих 20. Задайте множества X и Y перечислением элементов и найдите их пересечение и объединение.

800. Задайте путем перечисления элементов множество A двузначных чисел, являющихся квадратами натуральных чисел, и множества B двузначных чисел, кратных 16. Найдите пересечение и объединение этих множеств.

801. Найдите пересечение и объединение:

а) множеств цифр, используемых в записи чисел 11 243 и 6321;

б) множеств букв, используемых в записи слов «геометрия» и «география».

802. Пусть A — множество квадратов натуральных чисел, B — множество кубов натуральных чисел. Принадлежит ли:

а) пересечению множеств A и B число 1; 4; 64;

б) объединению множеств A и B число 16; 27; 64?

803. На рисунке 27 изображены отрезки AB и CD. Какая фигура является:

а) пересечением этих отрезков;

б) объединением этих отрезков?

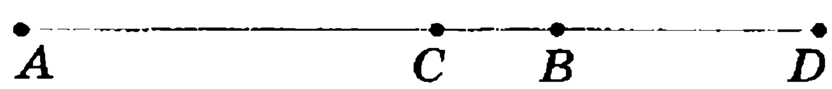


Рис. 27

804. Множеством каких фигур является пересечение:

а) множества прямоугольников и множества ромбов;

б) множества равнобедренных треугольников и множества прямоугольных треугольников?

805. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством $\boldsymbol{N}$ натуральных чисел, множеством $\boldsymbol{Z}$ целых чисел, множеством $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел. Найдите пересечение и объединение:

а) множества натуральных и множества целых чисел;

б) множества целых и множества рациональных чисел;

в) множества рациональных и множества иррациональных чисел.

806. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множеством чисел, кратных 4, и множеством чисел, кратных 3. Какое множество изображает общая часть этих кругов?

807. Проиллюстрируйте с помощью кругов Эйлера соотношение между множествами A и B, где A — множество целых чисел, кратных 6, B — множество целых чисел, кратных 12. Какое множество является:

а) пересечением множеств A и B;

б) объединением множеств A и B?

808. Найдите пересечение и объединение множеств X и Y, если:

а) X — множество простых чисел, Y — множество составных чисел;

б) X — множество целых чисел, кратных 5, Y — множество целых чисел, кратных 15.

809. Термометр показывает температуру с точностью до 1 °C. Измеряя им температуру воздуха, нашли, что она равна 16 °C. С какой относительной точностью выполнено измерение?

810. Решите уравнение

$$1 - \frac{1}{2 - x} = \frac{6 - x}{3x^2 - 12} - \frac{1}{x - 2}.$$

811. В одном фермерском хозяйстве благодаря применению новых технологий удалось получить гречихи на 2 ц с гектара больше, чем в другом. В результате оказалось, что в первом хозяйстве собрали 180 ц гречихи, а во втором только 160 ц, хотя во втором хозяйстве под гречиху было отведено на 1 га больше. Какова была урожайность гречихи в каждом хозяйстве?

33. Числовые промежутки

Пусть a и b — некоторые числа, причем $a < b$. Отметим на координатной прямой точки с координатами a и b (рис. 28). Если точка расположена между ними, то ей соответствует число x, которое больше a и меньше b. Верно и обратное: если число x больше a и меньше b, то оно изображается точкой, лежащей между точками с координатами a и b. Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $a \leqslant x \leqslant b$, изображается на координатной прямой отрезком, ограниченным точками с координатами a и b (рис. 29). Это множество называют *числовым отрезком* или просто отрезком и обозначают так: $[a; b]$ (читают: отрезок от a до b).

Множество чисел, удовлетворяющее условию $a < x < b$, называют *интервалом* и обозначают так: $(a; b)$ (читают: интервал от a до b). На рисунке 30 это множество показано штриховкой. Светлые кружки означают, что числа a и b не принадлежат этому множеству.

Множества чисел x, для которых выполняются двойные неравенства $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называют *полуинтервалами* и обозначают соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$ (читают: полуинтервал от a до b, включая a; полуинтервал от a до b, включая b). Эти полуинтервалы изображены на рисунках 31 и 32.

Числовые отрезки, интервалы и полуинтервалы называют *числовыми промежутками*.

Приведем другие примеры числовых промежутков.

Множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$, изображается лучом с началом в точке a, расположенным вправо от нее (рис. 33). Это множество называют *числовым лучом* и обозначают так: $[a; +\infty)$ (читают: числовой луч от a до плюс бесконечности).

Множество чисел, удовлетворяющих условию $x > a$, изображается тем

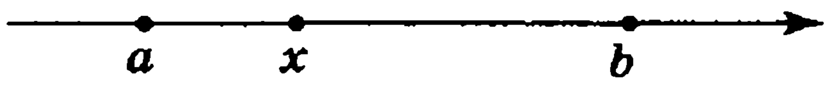


Рис. 28

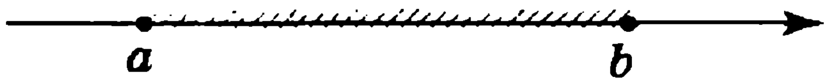


Рис. 29

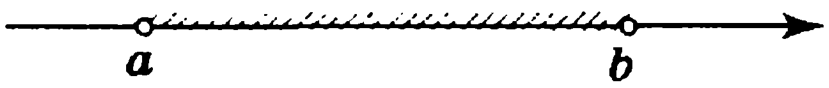


Рис. 30

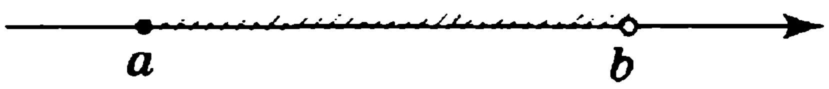


Рис. 31

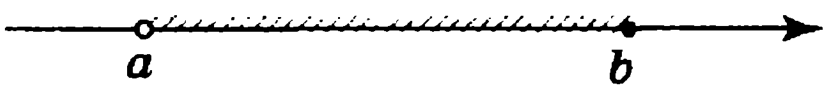


Рис. 32

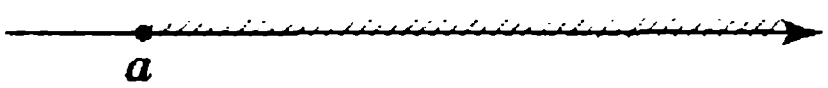


Рис. 33

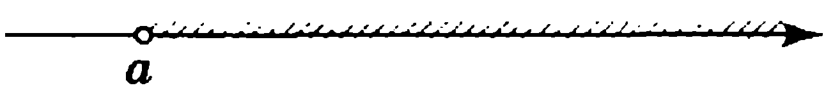


Рис. 34

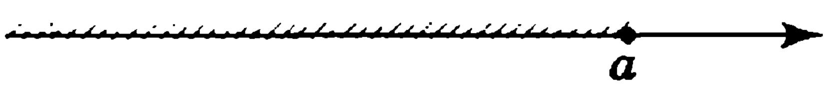


Рис. 35

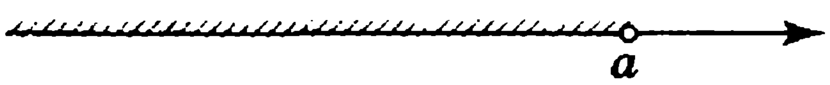


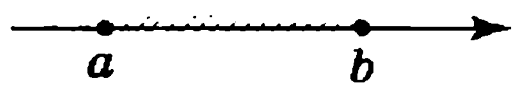
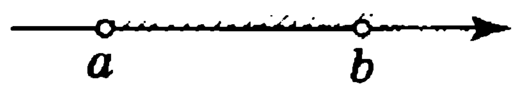
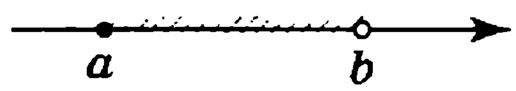
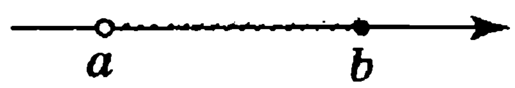
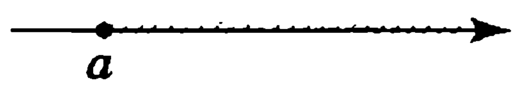
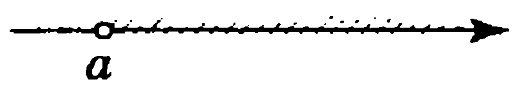
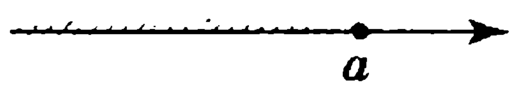
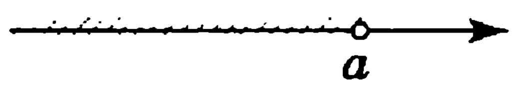
Рис. 36

же лучом, исключая точку a (рис. 34). Его называют *открытым числовым лучом* и обозначают так: $(a; +\infty)$ (читают: открытый числовой луч от a до плюс бесконечности).

На рисунках 35 и 36 изображены множества чисел x, для которых выполняются неравенства $x \leqslant a$ и $x < a$. Эти множества обозначают соответственно $(-\infty; a]$ и $(-\infty; a)$ (читают: числовой луч от минус бесконечности до a; открытый числовой луч от минус бесконечности до a).

Множество действительных чисел изображается всей координатной прямой. Его называют числовой прямой и обозначают так: $(-\infty; +\infty)$.

Обозначения числовых промежутков, их названия и изображение на координатной прямой показаны в таблице.

Неравенство, задающее числовой промежуток	Обозначение и название числового промежутка	Изображение числового промежутка на координатной прямой
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$ — числовой отрезок	
$a < x < b$	$(a; b)$ — интервал	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$ — полуинтервал	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$ — полуинтервал	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$ — числовой луч	
$x > a$	$(a; +\infty)$ — открытый числовой луч	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$ — числовой луч	
$x < a$	$(-\infty; a)$ — открытый числовой луч	

Выясним, какое множество является пересечением и какое объединением некоторых числовых промежутков.

Пример 1. Найдем пересечение и объединение числовых промежутков $[1; 5]$ и $[3; 7]$ (рис. 37).

▶ Имеем

$[1; 5] \cap [3; 7] = [3; 5]$;

$[1; 5] \cup [3; 7] = [1; 7]$. ◁

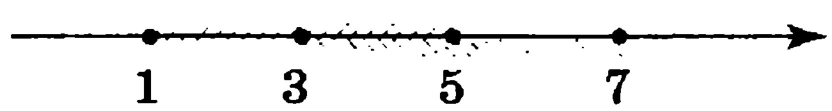


Рис. 37

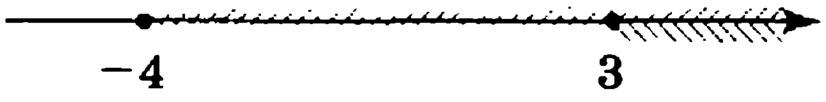


Рис. 38

Пример 2. Найдем пересечение и объединение числовых промежутков [−4; +∞) и [3; +∞) (рис. 38).

▶ Имеем

$$[-4;\ +\infty) \cap [3;\ +\infty) = [3;\ +\infty);$$
$$[-4;\ +\infty) \cup [3;\ +\infty) = [-4;\ +\infty). \quad \triangleleft$$

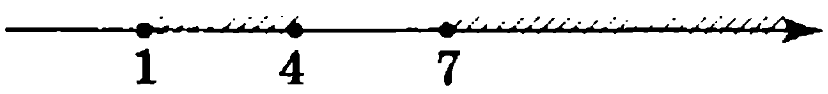


Рис. 39

Заметим, что если числовые промежутки не имеют общих элементов, то их пересечением является пустое множество. Например,

$$[1;\ 4] \cap [7;\ +\infty) = \varnothing \text{ (рис. 39).}$$

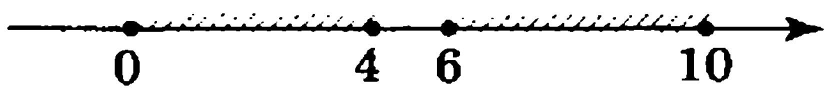


Рис. 40

Следует иметь также в виду, что объединение числовых промежутков не всегда представляет собой числовой промежуток. Например, множество [0; 4] ∪ [6; 10] не является числовым промежутком (рис. 40).

Упражнения

812. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:
а) [−2; 4]; в) [0; 5]; д) (3; +∞); ж) (−∞; 4];
б) (−3; 3); г) (−4; 0); е) [2; +∞); з) (−∞; −1).

813. Назовите промежутки, изображенные на рисунке 41, и обозначьте их.

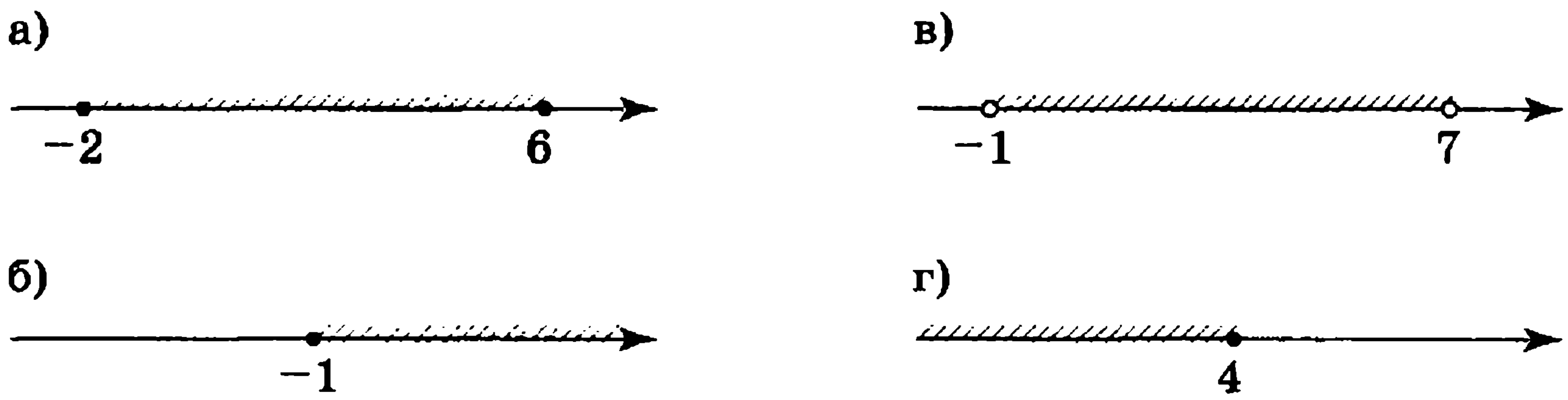


Рис. 41

814. Изобразите на координатной прямой промежуток и назовите его:
а) (3; 7); б) [1; 6]; в) (−∞; 5); г) [12; +∞).

815. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству:
а) $x \geqslant -2$; б) $x \leqslant 3$; в) $x > 8$; г) $x < -5$.

816. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству:
а) $-1{,}5 \leqslant x \leqslant 4$; в) $-5 \leqslant x \leqslant -3\frac{1}{3}$;
б) $-2 < x < 1{,}3$; г) $2 < x \leqslant 6{,}1$.

817. а) Принадлежит ли интервалу $(-4; 6{,}5)$ число: -3; -5; 5; $6{,}5$; $-3{,}9$; $-4{,}1$?

б) Принадлежит ли отрезку $[-8; -5]$ число: -9; -8; $-5{,}5$; -5; -6; $-7{,}5$?

818. Какие из чисел $-1{,}6$; $-1{,}5$; -1; 0; 3; $5{,}1$; $6{,}5$ принадлежат промежутку:

а) $[-1{,}5; 6{,}5]$; б) $(3; +\infty)$; в) $(-\infty; -1]$?

819. Принадлежит ли интервалу $(1{,}5; 2{,}4)$ число:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{6}$?

820. Укажите все дроби вида $\frac{a}{54}$, где $a \in N$, принадлежащие промежутку $\left[\frac{1}{9}; \frac{1}{6}\right]$.

821. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $(-4; 3)$; б) $[-3; 5]$?

822. Какие целые числа принадлежат промежутку:

а) $[0; 8]$; б) $(-3; 3)$; в) $(-5; 2)$; г) $(-4; 9]$?

823. Укажите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-12; -9]$; б) $[-1; 17)$; в) $(-\infty; 31]$; г) $(-\infty; 8)$.

824. Принадлежит ли промежутку $(-\infty; 2)$ число $1{,}98$? Укажите два числа, большие $1{,}98$, принадлежащие этому промежутку. Можно ли найти наибольшее число, принадлежащее этому промежутку? Существует ли в этом промежутке наименьшее число?

825. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) $(1; 8)$ и $(5; 10)$; в) $(5; +\infty)$ и $(7; +\infty)$;

б) $[-4; 4]$ и $[-6; 6]$; г) $(-\infty; 10)$ и $(-\infty; 6)$.

826. Сколько целых чисел принадлежит пересечению интервалов $(-3{,}9; 2)$ и $(-4{,}3; 1)$? Выберите верный ответ:

1. Три 2. Четыре 3. Пять 4. Шесть

827. Покажите штриховкой на координатной прямой объединение промежутков:

а) $[-7; 0]$ и $[-3; 5]$; в) $(-\infty; 4)$ и $(10; +\infty)$;

б) $(-4; 1)$ и $(10; 12)$; г) $[3; +\infty)$ и $(8; +\infty)$.

828. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $(-3; +\infty)$ и $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; 6)$ и $(-\infty; 9)$;

б) $(-\infty; 2)$ и $[0; +\infty)$; г) $[1; 5]$ и $[0; 8]$.

829. Упростите выражение:

а) $\dfrac{1+\dfrac{a-x}{x}}{ax}$; б) $\dfrac{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}-1}{2a^2b^2}$.

830. Докажите неравенство $a^2 + 5 > 2a$.

831. Пассажир проехал в поезде 120 км и вернулся с обратным поездом, проходящим в час на 5 км больше. Определите скорость каждого поезда, если известно, что на обратный путь он затратил на 20 мин меньше.

832. При каком x значение функции, заданной формулой $y = \dfrac{3x-1}{x-2}$, равно -1?

34. Решение неравенств с одной переменной

Неравенство $5x - 11 > 3$ при одних значениях переменной x обращается в верное числовое неравенство, а при других нет. Например, если вместо x подставить число 4, то получится верное неравенство $5 \cdot 4 - 11 > 3$, а если подставить число 2, то получится неравенство $5 \cdot 2 - 11 > 3$, которое не является верным. Говорят, что число 4 является *решением неравенства* $5x - 11 > 3$ или удовлетворяет этому неравенству. Нетрудно проверить, что решениями неравенства являются, например, числа 100, 180, 1000. Числа 2; 0,5; -5 не являются решениями этого неравенства.

Определение. Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Решить неравенство — значит найти все его решения или доказать, что решений нет.

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.

При решении неравенств используются следующие свойства:

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;
если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Например, неравенство

$$18 + 6x > 0 \qquad (1)$$

равносильно неравенству

$$6x > -18, \qquad (2)$$

а неравенство $6x > -18$ равносильно неравенству $x > -3$.

Указанные свойства неравенств можно доказать, опираясь на свойства числовых неравенств.

Докажем, например, что равносильны неравенства (1) и (2). Пусть некоторое число a является решением неравенства (1), т. е. обращает его в верное числовое неравенство $18 + 6a > 0$. Прибавив к обеим частям этого неравенства число -18, получим верное неравенство $18 + 6a - 18 > 0 - 18$, т. е. $6a > -18$, а это означает, что число a является решением неравенства (2).

Мы показали, что каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2). Аналогично доказывается, что каждое решение неравенства (2) служит решением неравенства (1). Таким образом, неравенства (1) и (2) имеют одни и те же решения, т. е. являются равносильными.

Подобными рассуждениями устанавливается справедливость обоих свойств неравенств в общем виде.

Приведем примеры решения неравенств.

Пример 1. Решим неравенство $16x > 13x + 45$.

▶ Перенесем слагаемое $13x$ с противоположным знаком в левую часть неравенства:

$$16x - 13x > 45.$$

Приведем подобные члены:

$$3x > 45.$$

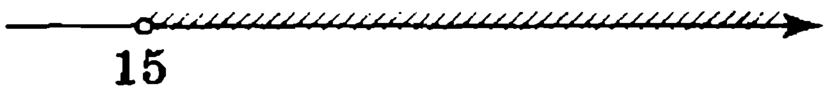


Рис. 42

Разделим обе части неравенства на 3:

$$x > 15.$$

Множество решений неравенства состоит из всех чисел, больших 15. Это множество представляет собой открытый числовой луч $(15; +\infty)$, изображенный на рисунке 42.

Ответ можно записать в виде числового промежутка $(15; +\infty)$ или в виде неравенства $x > 15$, задающего этот промежуток. ◁

Пример 2. Решим неравенство $15x - 23(x+1) > 2x + 11$.

▶ Раскроем скобки в левой части неравенства:

$$15x - 23x - 23 > 2x + 11.$$

Перенесем с противоположными знаками слагаемое $2x$ из правой части неравенства в левую, а слагаемое -23 из левой части в правую и приведем подобные члены:

$$15x - 23x - 2x > 11 + 23,$$
$$-10x > 34.$$

Разделим обе части на -10, при этом изменим знак неравенства на противоположный:

$$x < -3{,}4.$$

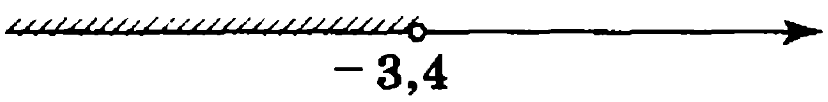


Рис. 43

Множество решений данного неравенства представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; -3{,}4)$, изображенный на рисунке 43.

Ответ: $(-\infty; -3{,}4)$. ◁

Пример 3. Решим неравенство $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} < 2$.

▶ Умножим обе части неравенства на наименьший общий знаменатель дробей, входящих в неравенство, т. е. на 6. Получим

$$\frac{x}{3} \cdot 6 - \frac{x}{2} \cdot 6 < 2 \cdot 6,$$
$$2x - 3x < 12.$$

Отсюда

$$-x < 12,$$
$$x > -12.$$

Ответ: $(-12; +\infty)$. ◁

В каждом из рассмотренных примеров мы заменяли заданное неравенство равносильным ему неравенством вида $ax > b$ или $ax < b$, где a и b — некоторые числа. Неравенства такого вида называют *линейными неравенствами с одной переменной.*

В приведенных примерах мы получали линейные неравенства, в которых коэффициент при переменной не равен нулю. Может случиться, что при решении неравенства мы придем к линейному неравенству вида $0 \cdot x > b$ или $0 \cdot x < b$. Неравенство такого вида, а значит, и соответствующее исходное неравенство либо не имеют решений, либо их решением является любое число.

Пример 4. Решим неравенство

$$2(x+8) - 5x < 4 - 3x.$$

▶ Имеем

$$2x + 16 - 5x < 4 - 3x,$$

$$2x - 5x + 3x < 4 - 16.$$

Приведем подобные члены в левой части неравенства и запишем результат в виде $0 \cdot x$:

$$0 \cdot x < -12.$$

Полученное неравенство не имеет решений, так как при любом значении x оно обращается в числовое неравенство $0 < -12$, не являющееся верным. Значит, не имеет решений и равносильное ему заданное неравенство.

Ответ: решений нет. ◁

Упражнения

833. Является ли решением неравенства $5y > 2(y-1) + 6$ значение y, равное:

а) 8; б) −2; в) 1,5; г) 2?

834. Укажите два каких-либо решения неравенства $2x < x + 7$.

835. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $x + 8 > 0$; в) $x + 1{,}5 \leqslant 0$;
б) $x - 7 < 0$; г) $x - 0{,}4 \geqslant 0$.

836. Решите неравенство:

а) $3x > 15$; б) $-4x < -16$; в) $-x \geqslant 1$; г) $11y \leqslant 33$; д) $12y < 1{,}8$; е) $27b \geqslant 12$; ж) $-6x > 1{,}5$; з) $15x \leqslant 0$; и) $0{,}5y > -4$; к) $2{,}5a > 0$; л) $\frac{1}{3}x > 6$; м) $-\frac{1}{7}y < -1$.

837. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $2x < 17$; б) $5x \geqslant -3$; в) $-12x < -48$; г) $-x < -7{,}5$; д) $30x > 40$; е) $-15x < -27$; ж) $-4x \geqslant -1$; з) $10x \leqslant -24$; и) $\frac{1}{6}x < 2$; к) $-\frac{1}{3}x < 0$; л) $0{,}02x \geqslant -0{,}6$; м) $-1{,}8x \leqslant 36$.

838. Решите неравенство $5x + 1 > 11$. Укажите три каких-нибудь решения этого неравенства.

839. Решите неравенство $3x - 2 < 6$. Является ли решением этого неравенства число: 4; $2\frac{4}{5}$; $2\frac{4}{7}$?

840. Решите неравенство:

а) $7x - 2{,}4 < 0{,}4$; б) $1 - 5y > 3$; в) $2x - 17 \geqslant -27$; г) $2 - 3a \leqslant 1$; д) $17 - x > 10 - 6x$; е) $30 + 5x \leqslant 18 - 7x$; ж) $64 - 6y \geqslant 1 - y$; з) $8 + 5y \leqslant 21 + 6y$.

841. Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $11x - 2 < 9$; б) $2 - 3y > -4$; в) $17 - x \leqslant 11$; г) $2 - 12x > -1$; д) $3y - 1 > -1 + 6y$; е) $0{,}2x - 2 < 7 - 0{,}8x$; ж) $6b - 1 < 12 + 7b$; з) $16x - 34 > x + 1$.

842. а) При каких значениях x двучлен $2x - 1$ принимает положительные значения?

б) При каких значениях y двучлен $21 - 3y$ принимает отрицательные значения?

в) При каких значениях c двучлен $5 - 3c$ принимает значения, большие 80?

843. а) При каких значениях a значения двучлена $2a - 1$ меньше значений двучлена $7 - 1{,}2a$?

б) При каких значениях p значения двучлена $1{,}5p - 1$ больше значений двучлена $1 + 1{,}1p$?

844. Решите неравенство:

а) $5(x-1)+7 \leqslant 1-3(x+2)$;
б) $4(a+8)-7(a-1) < 12$;
в) $4(b-1{,}5)-1{,}2 \geqslant 6b-1$;
г) $1{,}7-3(1-m) \leqslant -(m-1{,}9)$;
д) $4x > 12(3x-1)-16(x+1)$;
е) $a+2 < 5(2a+8)+13(4-a)$;
ж) $6y-(y+8)-3(2-y) \leqslant 2$.

845. Решите неравенство:

а) $4(2-3x)-(5-x) > 11-x$;
б) $2(3-z)-3(2+z) \leqslant z$;
в) $1 > 1{,}5(4-2a)+0{,}5(2-6a)$;
г) $2{,}5(2-y)-1{,}5(y-4) \leqslant 3-y$;
д) $x-2 \geqslant 4{,}7(x-2)-2{,}7(x-1)$;
е) $3{,}2(a-6)-1{,}2a \leqslant 3(a-8)$.

846. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $a(a-4)-a^2 > 12-6a$;
б) $(2x-1)2x-5x < 4x^2-x$;
в) $5y^2-5y(y+4) \geqslant 100$;
г) $6a(a-1)-2a(3a-2) < 6$.

847. Решите неравенство:

а) $0{,}2x^2-0{,}2(x-6)(x+6) > 3{,}6x$;
б) $(2x-5)^2-0{,}5x < (2x-1)(2x+1)-15$;
в) $(12x-1)(3x+1) < 1+(6x+2)^2$;
г) $(4y-1)^2 > (2y+3)(8y-1)$.

848. Решите неравенство:

а) $4b(1-3b)-(b-12b^2) < 43$;
б) $3y^2-2y-3y(y-6) \geqslant -2$;
в) $2p(5p+2)-p(10p+3) \leqslant 14$;
г) $a(a-1)-(a^2+a) < 34$.

849. Решите неравенство:

а) $\frac{2x}{5} > 1$;
б) $\frac{x}{3} < 2$;
в) $\frac{6x}{7} \geqslant 0$;
г) $\frac{3x-1}{4} > 2$;
д) $2 > \frac{6-x}{5}$;
е) $\frac{2+3x}{18} < 0$;
ж) $\frac{12-7x}{42} \geqslant 0$;
з) $\frac{1}{3}(x+15) > 4$;
и) $6 \leqslant \frac{2}{7}(x+4)$.

850. Решите неравенство:

а) $\frac{9x}{5} \geqslant 0$;
б) $1 < \frac{3x}{4}$;
в) $\frac{5+6x}{2} > 3$;
г) $\frac{4x-11}{4} \leqslant 0$;
д) $\frac{1}{7}x \geqslant 2$;
е) $\frac{2}{11}(x-4) < 3$.

851. При каких значениях y:

а) значения дроби $\frac{7-2y}{6}$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y-7}{12}$;

б) значения дроби $\frac{4,5-2y}{5}$ меньше соответствующих значений дроби $\frac{2-3y}{10}$;

в) значения двучлена $5y-1$ больше соответствующих значений дроби $\frac{3y-1}{4}$;

г) значения дроби $\frac{5-2y}{12}$ меньше соответствующих значений двучлена $1-6y$?

852. Решите неравенство:

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}<5$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{2}>-3$; д) $\frac{2x}{5}-x\leqslant 1$;

б) $\frac{3y}{2}-\frac{y}{3}\geqslant 2$; г) $y+\frac{y}{2}>3$; е) $\frac{3x}{4}-2x<0$.

853. Решите неравенство и покажите на координатной прямой множество его решений:

а) $\frac{13x-1}{2}<4x$; в) $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\leqslant 2$;

б) $\frac{5-2a}{4}\geqslant 2a$; г) $\frac{2y}{5}-\frac{y}{2}\geqslant 1$.

854. Решите неравенство:

а) $\frac{3+x}{4}+\frac{2-x}{3}<0$; г) $x-\frac{x-3}{5}+\frac{2x-1}{10}\leqslant 4$;

б) $\frac{4-y}{5}-5y\geqslant 0$; д) $\frac{y-1}{2}-1+\frac{2y-1}{6}>y$;

в) $y-\frac{2y-1}{4}\geqslant 1$; е) $p-\frac{p-1}{2}-\frac{p+3}{4}>2$.

855. Решите неравенство:

а) $\frac{2a-1}{2}-\frac{3a-3}{5}>a$; в) $\frac{5x-1}{5}+\frac{x+1}{2}\leqslant x$;

б) $x-\frac{2x+3}{2}\leqslant\frac{x-1}{4}$; г) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+3}{8}-y>2$.

856. а) При каких значениях a сумма дробей $\frac{2a-1}{4}$ и $\frac{a-1}{3}$ положительна?

б) При каких значениях b разность дробей $\frac{3b-1}{2}$ и $\frac{1+5b}{4}$ отрицательна?

857. Решите неравенство:

а) $31(2x+1)-12x>50x$;   в) $3x+7>5(x+2)-(2x+1)$;

б) $x+4-\frac{x}{3}<\frac{2x}{3}$;   г) $\frac{12x-1}{3}<4x-3$.

858. При каких значениях x функция, заданная формулой $y=2x+13$, принимает положительные значения? отрицательные значения?

859. При каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2x-4}$;   в) $\sqrt{\frac{1+3a}{25}}$;   д) $\sqrt{-3(1-5x)}$;

б) $\sqrt{4-6a}$;   г) $\sqrt{\frac{7-5a}{8}}$;   е) $\sqrt{-(6-x)}$?

$\boxed{860.}$ Найдите область определения функции:

а) $y=\frac{\sqrt{7-14x}}{x+8}$;   б) $y=\frac{6}{\sqrt{4-x}-1}$.

861. Найдите:

а) наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$1{,}6-(3-2y)<5;$$

б) наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$8(6-y)<24{,}2-7y.$$

862. При каких натуральных значениях n:

а) разность $(2-2n)-(5n-27)$ положительна;

б) сумма $(-27{,}1+3n)+(7{,}1+5n)$ отрицательна?

$\boxed{863.}$ Найдите множество значений a, при которых уравнение

$$(a+5)x^2+4x-20=0$$

не имеет корней.

$\boxed{864.}$ Найдите множество значений k, при которых уравнение

$$(k-4)x^2+16x-24=0$$

имеет два корня.

865. Длина стороны прямоугольника 6 см. Какой должна быть длина другой стороны, чтобы периметр прямоугольника был меньше периметра квадрата со стороной 4 см?

866. Длина основания прямоугольного параллелепипеда 12 дм, ширина 5 дм. Какой должна быть высота параллелепипеда, чтобы его объем был меньше объема куба с ребром 9 дм?

867. Одна из переплетных мастерских берет по 48 р. за книгу и еще 140 р. за оформление заказа, а другая — по 56 р. за книгу и 90 р. за оформление заказа. Укажите наименьшее число книг, при котором заказ выгоднее сделать в первой мастерской.

868. За денежный почтовый перевод до 1000 р. в некотором городе берется плата 7 р. плюс 5% от переводимой суммы. Посетитель имеет 800 р. Укажите наибольшее целое число рублей, которое он может перевести.

869. Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке не позднее чем через 3 ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?

870. Найдите значение дроби $\frac{x^2 + x - 5}{x - 1}$ при $x = 1 - \sqrt{3}$.

871. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 4}{6} - \frac{x}{2} = \frac{x - 4}{3}$;   б) $\frac{2x^2 - 1}{2} - x + \frac{1}{2} = 0$.

872. Решите графически уравнение $\frac{12}{x} = x^2$.

873. Моторная лодка прошла 30 км по течению реки и возвратилась обратно, затратив на весь путь 5 ч 20 мин. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

35. Решение систем неравенств с одной переменной

Задача. Турист вышел с турбазы по направлению к станции, расположенной на расстоянии 20 км. Если турист увеличит скорость на 1 км/ч, то за 4 ч он пройдет расстояние, большее 20 км. Если он уменьшит скорость на 1 км/ч, то даже за 5 ч не успеет дойти до станции. Какова скорость туриста?

▶ Пусть скорость туриста равна x км/ч. Если турист будет идти со скоростью $(x + 1)$ км/ч, то за 4 ч он пройдет $4(x + 1)$ км. По условию задачи $4(x + 1) > 20$. Если турист будет идти со скоростью $(x - 1)$ км/ч, то за 5 ч он пройдет $5(x - 1)$ км. По условию задачи $5(x - 1) < 20$.

Требуется найти те значения x, при которых верно как неравенство $4(x + 1) > 20$, так и неравенство $5(x - 1) < 20$, т. е. найти общие решения этих неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему неравенств, и используют запись

$$\begin{cases} 4(x+1) > 20, \\ 5(x-1) < 20. \end{cases}$$

Заменив каждое неравенство системы равносильным ему неравенством, получим систему

$$\begin{cases} x > 4, \\ x < 5. \end{cases}$$

Значит, значение x должно удовлетворять условию $4 < x < 5$.
Ответ: скорость туриста больше 4 км/ч, но меньше 5 км/ч. ◁

Определение. Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Пример 1. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 6, \\ 5 - 3x > -13. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 2x > 7, \\ -3x > -18. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x > 3{,}5, \\ x < 6. \end{cases}$$

Решениями системы являются значения x, удовлетворяющие каждому из неравенств $x > 3{,}5$ и $x < 6$. Изобразив на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3{,}5$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < 6$ (рис. 44), найдем, что оба неравенства верны при $3{,}5 < x < 6$. Множеством решений системы является интервал (3,5; 6).

Ответ можно записать в виде интервала (3,5; 6) или в виде двойного неравенства $3{,}5 < x < 6$, задающего этот интервал. ◁

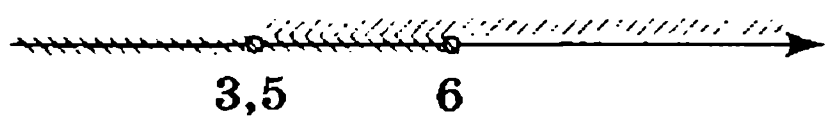


Рис. 44

Пример 2. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 2 > 25, \\ 1 - x < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} 3x > 27, \\ -x < -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 9, \\ x > 1. \end{cases}$$

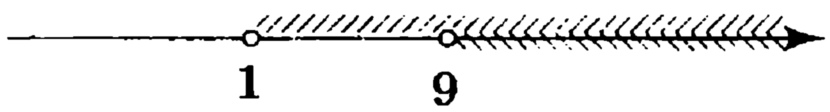


Рис. 45

Изобразим на координатной прямой множества решений каждого из полученных неравенств (рис. 45). Оба неравенства верны при $x > 9$. Ответ можно записать в виде неравенства $x > 9$ или в виде открытого числового луча $(9; +\infty)$, задаваемого этим неравенством. ◁

Пример 3. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 2 - x > 0, \\ 0{,}2x - 1 < 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases} -x > -2, \\ 0{,}2x < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2, \\ x < 5. \end{cases}$$

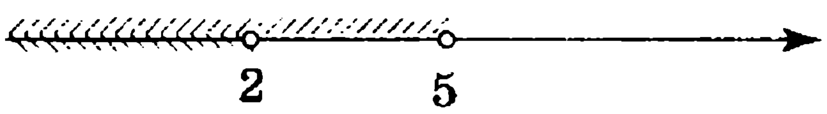


Рис. 46

Используя координатную прямую, найдем общие решения неравенств $x < 2$ и $x < 5$, т. е. пересечение множеств их решений (рис. 46). Мы видим, что пересечение этих множеств состоит из чисел, удовлетворяющих условию $x < 2$, т. е. представляет собой открытый числовой луч $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$. ◁

Пример 4. Решим систему неравенств

$$\begin{cases} 1 - 5x > 11, \\ 6x - 18 > 0. \end{cases}$$

▶ Имеем

$$\begin{cases}-5x > 10,\\ 6x > 18;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x < -2,\\ x > 3.\end{cases}$$

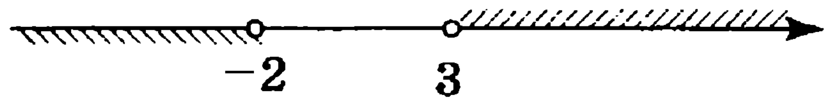


Рис. 47

Используя координатную прямую (рис. 47), найдем, что множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x < -2$, и множество чисел, удовлетворяющих неравенству $x > 3$, не имеют общих элементов, т. е. их пересечение пусто. Данная система неравенств не имеет решений.

Ответ: решений нет. ◁

Пример 5. Решим двойное неравенство

$$-1 < 3 + 2x < 3.$$

▶ Двойное неравенство представляет собой иную запись системы неравенств

$$\begin{cases}3 + 2x > -1,\\ 3 + 2x < 3.\end{cases}$$

Решив ее, найдем, что оба неравенства верны при

$$-2 < x < 0.$$

В этом примере запись удобно вести так:

$$-1 < 3 + 2x < 3,$$
$$-4 < 2x < 0,$$
$$-2 < x < 0.$$

Ответ: (–2; 0). ◁

Упражнения

874. Является ли число 3 решением системы неравенств:

а) $\begin{cases}6x - 1 > x,\\ 4x - 32 < 3x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}7x < 5x + 7,\\ 3x - 1 > 5 - x;\end{cases}$ в) $\begin{cases}5x + 4 < 20,\\ 3 - 2x > -1?\end{cases}$

875. Какие из чисел –2, 0, 5, 6 являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases}3x - 22 < 0,\\ 2x - 1 > 3?\end{cases}$$

876. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 17, \\ x > 12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 0, \\ x < 6; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x \leqslant 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x < 1, \\ x < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -3{,}5, \\ x > 8; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x > 8, \\ x \leqslant 20. \end{cases}$

877. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 12 > 0, \\ 3x > 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 10 < 0, \\ 2x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4y < -4, \\ 5 - y > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6y \geqslant 42, \\ 4y + 12 \leqslant 0. \end{cases}$

878. Решите систему неравенств и укажите несколько чисел, являющихся ее решениями:

а) $\begin{cases} x - 0{,}8 > 0, \\ -5x < 10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 1 > 3x, \\ 5x - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2 - x \leqslant 0, \\ x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 10x < 2, \\ x > 0{,}1. \end{cases}$

879. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}4x - 1 \leqslant 0, \\ 2{,}3x \geqslant 4{,}6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}3x > 4, \\ 0{,}2x + 1 < 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}7x - 2{,}1 < 0, \\ \frac{2}{3}x > 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{5}{6}x - 10 \leqslant 0, \\ 3x \leqslant 1\frac{1}{3}. \end{cases}$

880. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}6x + 7{,}2 > 0, \\ 5{,}2 \geqslant 2{,}6x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 0{,}2x < 3, \\ \frac{1}{6}x > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1{,}5x + 4{,}5 \leqslant 0, \\ \frac{1}{9}x \geqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x - 6{,}5 < 0, \\ \frac{1}{3}x < -1. \end{cases}$

881. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 < 1{,}4 - x, \\ 3x - 2 > x - 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 6 \leqslant x, \\ 3x + 12 \leqslant x + 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 25 - 6x \leqslant 4 + x, \\ 3x + 7{,}7 > 1 + 4x. \end{cases}$

882. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 57 - 7x > 3x - 2, \\ 22x - 1 < 2x + 47; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 102 - 73z > 2z + 2, \\ 81 + 11z \geqslant 1 + z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1 - 12y < 3y + 1, \\ 2 - 6y > 4 + 4y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 6 + 6{,}2x \geqslant 12 - 1{,}8x, \\ 2 - x \geqslant 3{,}5 - 2x. \end{cases}$

883. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\sqrt{3 - 2x} + \sqrt{1 - x}$; в) $\sqrt{6 - x} - \sqrt{3x - 9}$;

б) $\sqrt{x} - \sqrt{3x - 1}$; г) $\sqrt{2x + 2} + \sqrt{6 - 4x}$.

884. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2x - 5}}$; б) $y = \dfrac{6}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 1}}$.

885. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5(x - 2) - x > 2, \\ 1 - 3(x - 1) < -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x + 3 \geqslant 5(x - 4) + 1, \\ 4x + 1 \leqslant 43 - 3(7 + x); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y - (y - 4) < 6, \\ y > 3(2y - 1) + 18; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(2 - 3p) - 2(3 - 2p) > p, \\ 6 < p^2 - p(p - 8). \end{cases}$

886. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3(x - 2) < x, \\ 6x - 3 < 17 - (x - 5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3{,}3 - 3(1{,}2 - 5x) > 0{,}6(10x + 1), \\ 1{,}6 - 4{,}5(4x - 1) < 2x + 26{,}1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5{,}8(1 - a) - 1{,}8(6 - a) < 5, \\ 8 - 4(2 - 5a) > -(5a + 6); \end{cases}$

г) $\begin{cases} x(x - 1) - (x^2 - 10) < 1 - 6x, \\ 3{,}5 - (x - 1{,}5) < 6 - 4x. \end{cases}$

887. Решите систему неравенств и укажите все целые числа, которые являются ее решениями:

а) $\begin{cases} 3 - 2a < 13, \\ 5a < 17; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2 - 6y < 14, \\ 1 < 21 - 5y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12 - 6x \leqslant 0, \\ 3x + 1 \leqslant 25 - x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 4x < 15, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$

888. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} y \geqslant 0, \\ 7{,}2 - y \geqslant 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6 - 4b > 0, \\ 3b - 1 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 12a - 37 > 0, \\ 6a \leqslant 42; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 18x < 0, \\ 0{,}2 - 0{,}1x > 0. \end{cases}$

889. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2{,}5a - 0{,}5(8 - a) < a + 1{,}6, \\ 1{,}5(2a - 1) - 2a < a + 2{,}9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0{,}7(5a + 1) - 0{,}5(1 + a) < 3a, \\ 2a - (a - 1{,}7) > 6{,}7. \end{cases}$

890. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} < 7, \\ 1 - \dfrac{x}{6} > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{3x - 1}{2} - x \leqslant 2, \\ 2x - \dfrac{x}{3} \geqslant 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y - \dfrac{y - 1}{2} > 1, \\ \dfrac{y}{3} < 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2p - \dfrac{p - 2}{5} > 4, \\ \dfrac{p}{2} - \dfrac{p}{8} \leqslant 6. \end{cases}$

891. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{x - 3}{3} < 2, \\ \dfrac{13x - 1}{2} > 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4 - \dfrac{y - 1}{3} \geqslant y, \\ \dfrac{7y - 1}{8} \geqslant 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{3x + 1}{2} < -1, \\ \dfrac{x}{2} - 1 < x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{5a + 8}{3} - a \geqslant 2a, \\ 1 - \dfrac{6 - 15a}{4} \geqslant a. \end{cases}$

892. Решите двойное неравенство:

а) $-3 < 2x - 1 < 3$; в) $2 < 6 - 2y < 5$;

б) $-12 < 5 - x < 17$; г) $-1 < 5y + 4 < 19$.

893. Решите двойное неравенство и укажите три числа, являющиеся его решениями:

а) $-6{,}5 < \frac{7x+6}{2} \leqslant 20{,}5$; в) $-2 \leqslant \frac{3x-1}{8} \leqslant 0$;

б) $-1 < \frac{4-a}{3} \leqslant 5$; г) $-2{,}5 \leqslant \frac{1-3y}{2} \leqslant 1{,}5$.

894. Решите двойное неравенство:

а) $-1 \leqslant 15x+14 < 44$; в) $-1{,}2 < 1-2y < 2{,}4$;

б) $-1 \leqslant \frac{6-a}{3} \leqslant 1$; г) $-2 < \frac{4x-1}{3} \leqslant 0$.

895. а) При каких y значения двучлена $3y-5$ принадлежат промежутку $(-1; 1)$?

б) При каких b значения дроби $\frac{5-2b}{4}$ принадлежат промежутку $[-2; 1]$?

$\boxed{\textbf{896.}}$ При каких значениях a уравнение

$$x^2+2ax+a^2-4=0$$

имеет два корня, принадлежащие промежутку $(-6; 6)$?

$\boxed{\textbf{897.}}$ При каких значениях b уравнение

$$x^2-6bx+9b^2-16=0$$

имеет два отрицательных корня?

898. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x>8, \\ x>7, \\ x>-4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y<-1, \\ y<-5, \\ y<4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m>9, \\ m>10, \\ m<12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} q<6, \\ q<5, \\ q<1. \end{cases}$

899. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x-4<8, \\ 2x+5<13, \\ 3-x>1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-1<x+3, \\ 5x-1>6-2x, \\ x-5<0. \end{cases}$

900. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3-2a<13, \\ a-1>0, \\ 5a-35<0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6-4a<2, \\ 6-a>2, \\ 3a-1<8. \end{cases}$

901. Укажите допустимые значения переменной:

а) $\frac{\sqrt{12-25x}}{6}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5x-11}}$; в) $\frac{4x}{\sqrt{(3x-2)^2}}$.

902. Найдите все натуральные значения n, при которых значение дроби $\frac{9n^2+12n+12}{n}$ — натуральное число.

903. а) Выразите переменную h через S и a, если $S = \frac{1}{2}ah$.

б) Выразите переменную p через s и m, если $\frac{s}{p} = 0{,}5m$.

в) Выразите переменную t через s и a, если $s = \frac{at^2}{2}$ и $t > 0$.

904. Велосипедист проехал 20 км по дороге, ведущей в гору, и 60 км по ровной местности, затратив на весь путь 6 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на каждом участке пути, если известно, что в гору он ехал со скоростью, на 5 км/ч меньшей, чем по ровной местности?

Контрольные вопросы

Что называется пересечением двух множеств? объединением двух множеств?

Изобразите на координатной прямой числовые промежутки различного вида, назовите и обозначьте их.

Что называется решением неравенства? Является ли решением неравенства $3x - 11 > 1$ число 5; число 2? Что значит решить неравенство?

Что называется решением системы неравенств? Является ли решением системы неравенств $\begin{cases} 2x + 1 > 3, \\ 3x < 10 \end{cases}$ число 3? число 5? Что значит решить систему неравенств?

Для тех, кто хочет знать больше

36. Доказательство неравенств

Один из приемов доказательства неравенств состоит в том, что составляют разность левой и правой частей неравенства и показывают, что она сохраняет знак при любых указанных значениях переменных. Этот прием вам уже приходилось применять в простых случаях. Покажем его применение на более сложном примере.

Пример 1. Докажем, что

$$2\sqrt{a+1} > \sqrt{a} + \sqrt{a+2} \text{ при } a \geqslant 0.$$

▶ Составим разность левой и правой частей неравенства и преобразуем ее:

$$2\sqrt{a+1} - \sqrt{a} - \sqrt{a+2} = (\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}).$$

Для того чтобы оценить составленную разность, каждое из выражений, записанных в скобках, представим в виде дроби со знаменателем 1 и освободимся от иррациональности в ее числителе. Получим

$$(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}) = \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{1} + \frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2}}{1} =$$

$$= \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a+2})(\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2})}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+2}}.$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ является возрастающей, то знаменатель первой дроби меньше, чем знаменатель второй, т. е. первая дробь больше второй. Следовательно, разность дробей является положительной. Заданное неравенство доказано. ◁

Еще один прием доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из других неравенств, справедливость которых известна.

Пример 2. Докажем, что

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2, \text{ если } a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

▶ Из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел следует, что при указанных значениях переменных

$$\frac{a^2 + bc}{2} \geqslant \sqrt{a^2bc}, \quad \frac{b^2 + ac}{2} \geqslant \sqrt{b^2ac}, \quad \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{c^2ab}.$$

Перемножив эти неравенства, получим, что

$$\frac{a^2 + bc}{2} \cdot \frac{b^2 + ac}{2} \cdot \frac{c^2 + ab}{2} \geqslant \sqrt{a^4b^4c^4}.$$

Отсюда

$$(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab) \geqslant 8a^2b^2c^2.$$

Неравенство доказано.

В отдельных случаях удается доказать неравенство, используя некоторые очевидные соотношения. В качестве таких очевидных соотношений могут быть взяты, например, такие: $(1 + a)^2 > 1 + 2a$ при любом a, не равном нулю, $\frac{1}{c+1} < \frac{1}{c}$ при $c > 0$, $\sqrt{x+2} > \sqrt{x+1}$ при $x \geqslant -1$ и т. п.

Пример 3. Докажем, что двойное неравенство

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$$

верно при любом $x \geqslant 1$.

▶ Заменим разности $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ соответственно равными им дробями $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ и $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$. Тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}.$$

Так как $\sqrt{x+1} > \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} > \sqrt{x-1}$ при $x \geqslant 1$, то

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} > \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

т. е. $\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}$.

Неравенство доказано.

Пример 4. Докажем, что при любом натуральном $n > 1$ верно неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

▶ Очевидно, что при любом натуральном $n > 1$ верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}, \quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}.$$

Складывая почленно эти неравенства и прибавляя к левой и правой частям полученного неравенства по $\frac{1}{2n}$, будем иметь

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}.$$

Неравенство доказано. ◁

Упражнения

905. Докажите неравенство:
а) $a^2+b^2+4>2(a+b+1)$; б) $4a^2+b^2>4(a+b-2)$.

906. Докажите, что если $x>0$ и $y>0$, то:
а) $\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$; б) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\geqslant x+y$.

907. Докажите, что при $a>0$ и $b>0$ верно неравенство:
а) $(a+b)(ab+16)>8ab$; б) $(a^2+4b)(4b+25)>60ab$.

908. Докажите, что:
а) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant 6$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$;
б) $(1+a)(1+b)(1+c)>24$, если $a>0$, $b>0$, $c>0$ и $abc=9$.

909. Докажите, что куб полусуммы любых двух положительных чисел не превосходит полусуммы их кубов.

910. Докажите, что

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}>\sqrt{ab}+\sqrt{cd},$$

если $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d>0$.

911. Докажите, что при $a>0$, $b>0$, $c>0$ верно неравенство

$$\frac{3}{a+b+c}<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}.$$

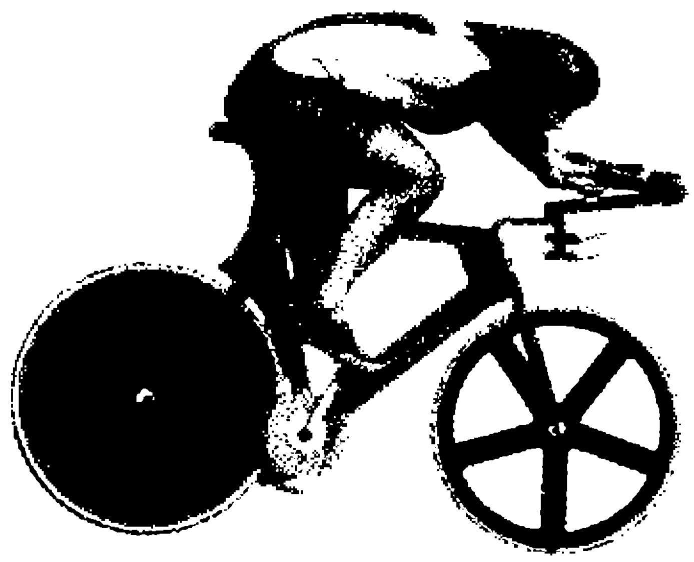
912. Докажите, что если $x + y + z = 1$, то

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leqslant 5.$$

913. Докажите, что при любом a, большем 1, верно неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}.$$

914. Велосипедист рассчитал, с какой скоростью он должен ехать из поселка в город и обратно, чтобы, пробыв в городе полчаса, вернуться в поселок к намеченному сроку. Однако на пути из поселка в город он ехал со скоростью, на 2 км/ч меньшей намеченной, а спустя полчаса возвращался из города в поселок со скоростью, на 2 км/ч большей намеченной. Успел ли велосипедист вернуться в поселок к назначенному сроку?



Дополнительные упражнения к главе IV

К параграфу 10

915. Докажите неравенство:
а) $(6y - 1)(y + 2) < (3y + 4)(2y + 1)$;
б) $(3y - 1)(2y + 1) > (2y - 1)(2 + 3y)$.

916. Докажите неравенство:
а) $(x + 1)^2 \geqslant 4x$;
б) $(3b + 1)^2 > 6b$;
в) $4(x + 2) < (x + 3)^2 - 2x$;
г) $1 + (m + 2)^2 > 3(2m - 1)$.

917. Верно ли неравенство:
а) $\sqrt{7} + 2\sqrt{5} < 2 + \sqrt{35}$;
б) $4\sqrt{6} + 2 > 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2}$?

918. Докажите неравенство:
а) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$;
б) $a^2 + b^2 + c^2 + 5 > 2(a + b + c)$.

919. Докажите, что при $a > 3$ значение выражения

$$\left(\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+3}{a-3}\right)\left(1 + \frac{3}{a}\right)$$

отрицательно.

920. Докажите, что при $y > 1$ значение выражения

$$\frac{y^2+3}{y-1} - \frac{2}{y} : \left(\frac{1}{y^2-y} + \frac{y-3}{y^2-1}\right)$$

положительно.

921. В каком случае катер затратит больше времени: если он пройдет 20 км по течению реки и 20 км против течения или если он пройдет 40 км в стоячей воде?

922. Велосипедисты Смирнов и Антонов отправились одновременно из поселка в город и, пробыв в городе одинаковое время, вернулись в поселок. Смирнов в город и обратно ехал со скоростью 15 км/ч, а Антонов в город ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем Смирнов, а возвращался со скоростью, на 1 км/ч меньшей, чем Смирнов. Кто из велосипедистов вернулся в поселок раньше?

923. Докажите, что полупериметр треугольника больше длины каждой из его сторон.

924. Сравните площадь квадрата с площадью произвольного прямоугольника, имеющего тот же периметр.

925. Используя выделение из трехчлена квадрата двучлена, докажите неравенство:

а) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;   б) $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

926. Докажите, что при $a > 0$ и $b > 0$ верно неравенство:

а) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$;   б) $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

927. Используя соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел, докажите, что при $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ верно неравенство:

а) $ac + \frac{b}{c} \geqslant 2\sqrt{ab}$;

б) $\left(1 + \frac{a^2}{bc}\right)\left(1 + \frac{b^2}{ac}\right)\left(1 + \frac{c^2}{ab}\right) \geqslant 8$.

928. *Старинная задача (из книги «„Начала“ Евклида»).* Докажите, что если a — наибольшее число в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где a, b, c, d — положительные числа, то верно неравенство $a + d > b + c$.

929. Известно, что $12 \leqslant y \leqslant 16$. Оцените значение выражения:

а) $-0{,}5y$; б) $42 - 2y$; в) $\frac{1}{y} + 2$.

930. Оцените значение выражения:

а) $a + 2b$, если $0 < a < 1$ и $-3 < b < -2$;

б) $\frac{1}{2}a - b$, если $7 < a < 10$ и $14 < b < 15$.

931. Оцените длину средней линии треугольника ABC, которая параллельна стороне AB, если $10{,}4 < AB < 10{,}5$.

932. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями a см и c см, если $3{,}4 \leqslant a \leqslant 3{,}5$ и $6{,}2 \leqslant c \leqslant 6{,}3$.

К параграфу 11

933. Принадлежит ли промежутку $[8; 41)$ число 40,9? Можно ли указать число, большее чем 40,9, принадлежащее этому промежутку?

Существует ли в промежутке $[8; 41)$ наибольшее число? наименьшее число?

934. Принадлежит ли промежутку $(7; 17]$ число 7,01? Можно ли указать число, меньшее чем 7,01, принадлежащее этому промежутку?

Существует ли в промежутке $(7; 17]$ наименьшее число? наибольшее число?

935. Укажите, если это возможно, наименьшее и наибольшее числа, принадлежащие промежутку:

а) $[12; 37]$; б) $[8; 13)$; в) $(11; 14)$; г) $[3; 19)$.

936. Верно ли, что:

а) $(-5;\ 5) \cap (-3;\ 2) = (-3;\ 2)$;

б) $(4;\ 11) \cup (0;\ 6) = (4;\ 6)$;

в) $(-\infty;\ 4) \cup (1;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$;

г) $(-\infty;\ 2) \cap (-2;\ +\infty) = (-2;\ 2)$?

937. Найдите пересечение и объединение:

а) множества целых чисел и множества положительных чисел;

б) множества простых чисел и множества нечетных натуральных чисел.

938. Является ли число $\sqrt{19}$ решением неравенства $x < 5$? Укажите какое-нибудь число, большее $\sqrt{19}$, удовлетворяющее этому неравенству.

939. Является ли число $\sqrt{11}$ решением неравенства $x > 3$? Укажите какое-либо число, меньшее $\sqrt{11}$, удовлетворяющее этому неравенству.

940. Решите неравенство:

а) $0{,}01(1-3x) > 0{,}02x + 3{,}01$;

б) $12(1-12x) + 100x > 36 - 49x$;

в) $(0{,}6y - 1) - 0{,}2(3y + 1) < 5y - 4$;

г) $\frac{2}{3}(6x + 4) - \frac{1}{6}(12x - 5) \leqslant 4 - 6x$;

д) $(3a + 1)(a - 1) - 3a^2 > 6a + 7$;

е) $15x^2 - (5x - 2)(3x + 1) < 7x - 8$.

941. При каких значениях a верно неравенство:

а) $\frac{a-1}{4} - 1 > \frac{a+1}{3} + 8$; в) $\frac{1-2a}{4} - 2 < \frac{1-5a}{8}$;

б) $\frac{3a-1}{2} - \frac{a-1}{4} > 0$; г) $\frac{5a}{6} - \frac{3a-1}{3} + \frac{2a-1}{2} < 1$?

942. Решите неравенство:

а) $\frac{x-0{,}5}{4} + \frac{x-0{,}25}{4} + \frac{x-0{,}125}{8} < 0$; б) $\frac{5-x}{3} - \frac{1-x}{2} > 1$.

943. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству:

а) $3(5-4x) + 2(14+x) > 0$; б) $(x+1)(x-1) - (x^2 - 3x) \leqslant 14$.

944. При каких значениях x:

а) значение дроби $\frac{3x-8}{12}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{x-1}{4}$;

б) значение дроби $\frac{x+1}{3}$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2x+3}{6}$?

945. Решите неравенство:

а) $2(4y-1) - 5y < 3y + 5$; б) $6(1-y) - 8(3y+1) + 30y > -5$.

946. Найдите, при каких значениях a уравнение имеет положительный корень:

а) $3x = 9a$; в) $x - 8 = 3a + 1$;

б) $x + 2 = a$; г) $2x - 3 = a + 4$.

947. Найдите, при каких значениях b уравнение имеет отрицательный корень:

а) $10x = 3b$; в) $3x - 1 = b + 2$;

б) $x - 4 = b$; г) $3x - 3 = 5b - 2$.

948. При каких значениях m верно равенство:

а) $|2m - 16| = 2m - 16$; в) $|m + 6| = -m - 6$;

б) $\frac{|12 - 6m|}{12 - 6m} = 1$; г) $\frac{|10m - 35|}{10m - 35} = -1$?

949. Найдите промежутки, в которых функция $y = -6x + 12$ принимает положительные значения; отрицательные значения. Ответ проиллюстрируйте на графике.

950. Со склада вывозят болванки: железные массой по 500 кг и медные массой по 200 кг. На грузовик, который может везти не более 4 т, погрузили 12 болванок. Сколько среди них может быть железных болванок?

951. С турбазы в город, отстоящий на расстояние 24 км, вышел первый турист со скоростью 4 км/ч. Спустя 2 ч вслед за ним отправился второй турист. С какой скоростью должен идти второй турист, чтобы догнать первого до его прихода в город?

952. От деревни до фермы 20 км, а от фермы до станции 40 км (рис. 48). С фермы по направлению к станции выехал велосипедист со скоростью 12 км/ч. Одновременно из деревни на станцию через ферму по той же дороге отправился мотоциклист. С какой скоростью должен ехать мотоциклист, чтобы догнать велосипедиста до его приезда на станцию?

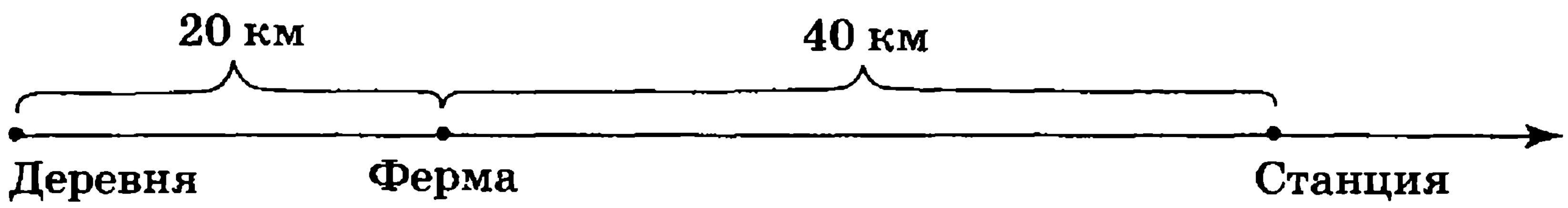


Рис. 48

953. Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его периметр не превосходит 46 см. Какова длина боковой стороны треугольника, если известно, что она выражается целым числом сантиметров?

954. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}3x - 1 < x + 0{,}4, \\ 2 - 3x < 5x + 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(x - 2)(x + 2) - 3x^2 < x, \\ 5x - 4 > 4 - 5x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2{,}5x - 0{,}12 > 0{,}6x + 0{,}07, \\ 1 - 2x > -x - 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} (x - 4)(5x - 1) - 5x^2 > x + 1, \\ 3x - 0{,}4 < 2x - 0{,}6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 1{,}4 < \frac{3x - 7}{5}, \\ 2x > 3 - \frac{2x}{5}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 1 + \frac{1 + x}{3} > \frac{2x - 1}{6} - 2, \\ 3x - \frac{x}{4} > 4. \end{cases}$

955. Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6x(x-1) - 3x(2x-1) < x, \\ 0{,}5x - 3{,}7 < 0{,}2x - 0{,}7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 0{,}7x - 3(0{,}2x+1) \leqslant 0{,}5x + 1, \\ 0{,}3(1-x) + 0{,}8x \geqslant x + 5{,}3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{3}(3x-2) + \frac{1}{6}(12x+1) > 0, \\ \frac{1}{7}(14x-21) + \frac{2}{9}(9x-6) < 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0{,}2(5x-1) + \frac{1}{3}(3x+1) < x + 5{,}8, \\ 8x - 7 - \frac{1}{6}(6x-2) > x. \end{cases}$

956. Решите двойное неравенство:

а) $-9 < 3x < 18$;

б) $1 < \frac{2x-1}{2} < 2$;

в) $3 \leqslant 5x - 1 \leqslant 4$;

г) $0 \leqslant \frac{1-x}{3} \leqslant 1$.

957. а) При каких x значение выражения $2x - 4$ принадлежит интервалу $(-1; 5)$?

б) При каких x значение дроби $\frac{x-5}{2}$ принадлежит числовому отрезку $[0; 5]$?

в) При каких x значения функции $y = -\frac{1}{3}x + 8$ принадлежат интервалу $(-1; 1)$?

г) При каких x значения функции $y = -2{,}5x + 6$ принадлежат числовому отрезку $[-6; -2]$?

958. Найдите положительные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} 3(y-1) - 4(y+8) < 5(y+5), \\ 1{,}2(1+5y) - 0{,}2 < 5(1-3y) - 3y; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 15(y-4) - 14(y-3) < y(y-9) - y^2, \\ \frac{5-y}{3} - y > 14 - \frac{2-y}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2y-1)(3y+2) - 6y(y-4) < 48, \\ \frac{y-1}{8} - \frac{6y+1}{4} - 1 < 0. \end{cases}$

959. Найдите отрицательные значения y, удовлетворяющие системе неравенств:

а) $\begin{cases} \dfrac{5y-1}{6} - \dfrac{2y-1}{2} > 0, \\ 1 - \dfrac{y+4}{3} < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (y+6)(5-y) + y(y-1) > 0, \\ 0{,}3y(10y+20) - 3y^2 + 30 > 0. \end{cases}$

$\boxed{\textbf{960.}}$ При каких значениях a уравнение

$$x^2 - 4ax + 4a^2 - 25 = 0$$

имеет два корня, каждый из которых больше 2?

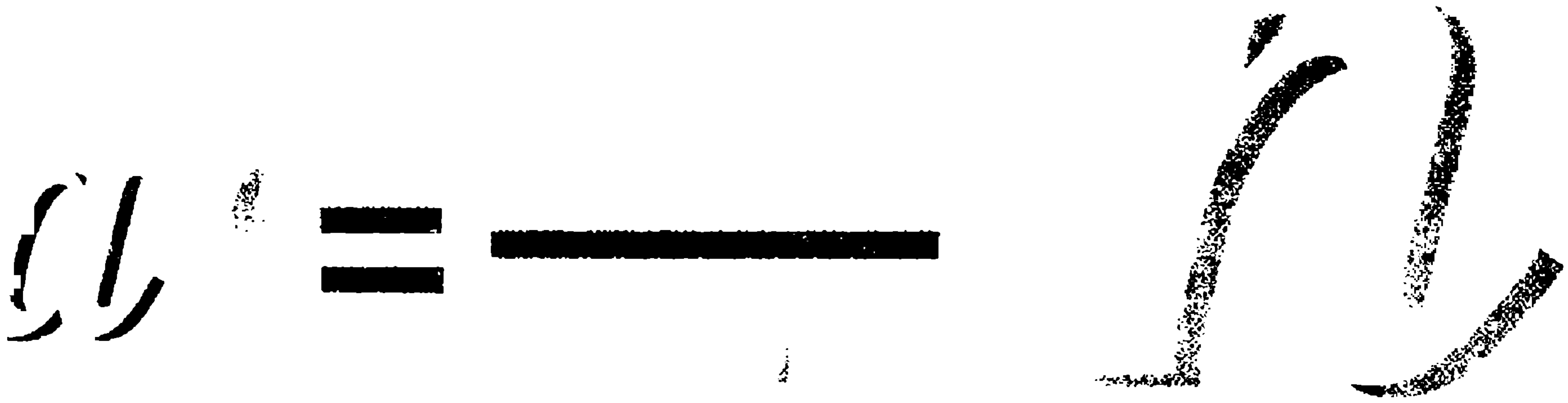
$\boxed{\textbf{961.}}$ При каких значениях b уравнение

$$x^2 - (2b-2)x + b^2 - 2b = 0$$

имеет два корня, принадлежащие интервалу (–5; 5)?

962. Если туристы будут проходить в день на 5 км больше, то они пройдут за 6 дней расстояние, большее 90 км. Если же они будут проходить в день на 5 км меньше, то за 8 дней они пройдут расстояние, меньшее 90 км. Сколько километров в день проходят туристы?

$\boxed{\textbf{963.}}$ Первую половину пути поезд прошел со скоростью 60 км/ч, а затем увеличил скорость. Какой могла быть скорость поезда во второй половине пути, если известно, что его средняя скорость на всем участке не превышала 72 км/ч?



Глава V СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

§ 12 СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЕ СВОЙСТВА

37. Определение степени с целым отрицательным показателем

В справочной литературе можно найти сведения о том, что масса Солнца равна $1{,}985 \cdot 10^{33}$ г, а масса атома водорода равна $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г. Запись 10^{33} означает произведение тридцати трех множителей, каждый из которых равен 10. А каков смысл записи 10^{-24}?

Выпишем последовательно степени числа 10 с показателями 0, 1, 2 и т. д. Получим строку

$$10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \dots . \qquad (1)$$

В этой строке каждое число меньше следующего за ним в 10 раз. Продолжая строку (1) по тому же закону влево, перед числом 10^0 следует написать число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ — число $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, перед числом $\frac{1}{10^2}$ — число $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Получим

$$\dots,\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \dots . \qquad (2)$$

В строке (2) справа от числа 10^0 показатель каждой степени на 1 меньше показателя следующей за ней степени. Распространяя этот закон на числа, стоящие слева от числа 10^0, их записывают в виде степени числа 10 с отрицательным показателем. Вместо $\frac{1}{10^1}$ пишут 10^{-1}, вместо $\frac{1}{10^2}$ пишут 10^{-2}, вместо $\frac{1}{10^3}$ пишут 10^{-3} и т. д. Получают

$$\ldots,\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots .$$

Итак, 10^{-1} означает $\frac{1}{10^1}$, 10^{-2} означает $\frac{1}{10^2}$, 10^{-3} означает $\frac{1}{10^3}$ и т. д. Такое соглашение принимается для степеней с любыми основаниями, отличными от нуля.

Определение. Если $a \neq 0$ и n — целое отрицательное число, то

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Пользуясь этим определением, найдем, что

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25};\quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81};\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8.$$

Выражению 0^n при целом отрицательном n (так же как и при $n = 0$) не приписывают никакого значения; это выражение не имеет смысла.

Напомним, что при натуральном n это выражение имеет смысл и его значение равно нулю.

Вернемся к примеру, рассмотренному в начале пункта. Теперь мы знаем, что запись $1{,}674 \cdot 10^{-24}$ г, выражающая массу атома водорода, означает

$$1{,}674 \cdot 10^{-24}\text{г} = 1{,}674 \cdot \frac{1}{10^{24}}\ \text{г} = 1{,}674 : 10^{24}\ \text{г} = \underbrace{0{,}000\ldots0}_{24\ \text{нуля}}1674\ \text{г}.$$

Упражнения

964. Замените степень с целым отрицательным показателем дробью:
а) 10^{-6}; б) 9^{-2}; в) a^{-1}; г) x^{-20}; д) $(ab)^{-3}$; е) $(a+b)^{-4}$.

965. Замените дробь степенью с отрицательным показателем:
а) $\frac{1}{10^2}$; б) $\frac{1}{6^7}$; в) $\frac{1}{x^7}$; г) $\frac{1}{y^{10}}$; д) $\frac{1}{7}$.

966. Представьте числа:

а) 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ в виде степени с основанием 2;

б) $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125 в виде степени с основанием 5.

967. Представьте числа:

а) $\frac{1}{81}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{3}$, 1, 3, 9, 27, 81 в виде степени с основанием 3;

б) 100, 10, 1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 в виде степени с основанием 10.

968. Вычислите:

а) 4^{-2}; г) $(-1)^{-20}$; ж) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$; и) $0{,}01^{-2}$;

б) $(-3)^{-3}$; д) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$; з) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2}$; к) $1{,}125^{-1}$.

в) $(-1)^{-9}$; е) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$;

969. Найдите значение выражения:

а) -10^{-4}; в) $(-0{,}8)^{-2}$; д) $-(-2)^{-3}$;
б) $-0{,}2^{-3}$; г) $(-0{,}5)^{-5}$; е) $-(-3)^{-2}$.

970. Вычислите:

а) $(-4)^{-3}$; в) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$; д) $-0{,}4^{-4}$;

б) $2{,}5^{-1}$; г) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; е) $-\left(2\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

971. Сравните с нулем значение степени:

а) 9^{-5}; б) $2{,}6^{-4}$; в) $(-7{,}1)^{-6}$; г) $(-3{,}9)^{-3}$.

972. Верно ли, что:

а) если $a > 0$ и n — целое число, то $a^n > 0$;
б) если $a < 0$ и n — четное отрицательное число, то $a^n > 0$;
в) если $a < 0$ и n — нечетное отрицательное число, то $a^n < 0$?

973. Найдите значение выражения x^p, если:

а) $x = -7$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -6$;
б) $x = 8$, $p = -1$; г) $x = -9$, $p = 0$.

974. Какое значение принимает выражение $-x^p$, если:

а) $x = -1$, $p = -2$; в) $x = 2$, $p = -1$;
б) $x = 0{,}5$, $p = -2$; г) $x = 0{,}5$, $p = -5$?

975. Найдите значения выражений x^n и x^{-n}, если:

а) $x = \frac{2}{3}$, $n = -2$; б) $x = -1{,}5$, $n = 3$.

976. Найдите значение выражения:

а) $8 \cdot 4^{-3}$; г) $10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-1}$; ж) $0{,}5^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$;

б) $-2 \cdot 10^{-5}$; д) $3^{-2} + 4^{-1}$; з) $0{,}3^0 + 0{,}1^{-4}$.

в) $18 \cdot (-9)^{-1}$; е) $2^{-3} - (-2)^{-4}$;

977. Вычислите:

а) $6 \cdot 12^{-1}$; в) $6^{-1} - 3^{-2}$; д) $12 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$;

б) $-4 \cdot 8^{-2}$; г) $1{,}3^0 - 1{,}3^{-1}$; е) $25 + 0{,}1^{-2}$.

978. Представьте выражение в виде дроби, не содержащей степени с отрицательным показателем:

а) $3x^{-5}$; в) $5ab^{-7}$; д) $x^{-1}c^{-3}$; ж) $2(x+y)^{-4}$;

б) $x^{-4}y$; г) $5(ab)^{-7}$; е) $-9yz^{-8}$; з) $10x^{-1}(x-y)^{-3}$.

979. Представьте в виде произведения дробь:

а) $\frac{3}{b^2}$; в) $\frac{2a^8}{c^5}$; д) $\frac{1}{x^2y^3}$; ж) $\frac{2a}{(a-2)^2}$;

б) $\frac{x}{y}$; г) $\frac{a^5}{7b^3}$; е) $\frac{(a+b)^2}{b^4c^4}$; з) $\frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4}$.

980. Представьте в виде дроби выражение:

а) $a^{-2} + b^{-2}$; в) $(a + b^{-1})(a^{-1} - b)$;

б) $xy^{-1} + xy^{-2}$; г) $(x - 2y^{-1})(x^{-1} + 2y)$.

981. Преобразуйте в дробь выражение:

а) $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)^{-1}$; б) $(a - b)^{-2}(a^{-2} - b^{-2})$.

982. Найдите множество значений x, на котором функция $y = (x-2)^{-1}$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения.

983. При каких натуральных n дробь $\frac{(n-7)^2}{n}$ принимает натуральные значения?

984. Найдите коэффициент обратной пропорциональности, зная, что ее график проходит через точку:

а) $A(1{,}5;\ 8)$; б) $B(0{,}04;\ -25)$.

38. Свойства степени с целым показателем

Известные вам свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем (нужно только предполагать, что основание степени не равно нулю).

Для каждого $a \neq 0$ и любых целых m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \qquad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \qquad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}; \qquad (3)$$

для каждых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любого целого n

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \qquad (5)$$

Эти свойства можно доказать, опираясь на определение степени с целым отрицательным показателем и свойства степени с натуральным показателем.

Докажем, например, справедливость свойства (1) (основного свойства степени) для случая, когда показатели степеней — целые отрицательные числа. Иначе говоря, докажем, что если k и p — натуральные числа и $a \neq 0$, то $a^{-k} \cdot a^{-p} = a^{-k-p}$.

Имеем

$$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p}.$$

Заменяя степени a^{-k} и a^{-p} дробями $\frac{1}{a^k}$ и $\frac{1}{a^p}$ и дробь $\frac{1}{a^{k+p}}$ степенью $a^{-(k+p)}$, мы воспользовались определением степени с целым отрицательным показателем. Заменяя произведение $a^k a^p$ степенью a^{k+p}, мы использовали основное свойство степени с натуральным показателем.

Из свойств степени вытекает, что действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Пример 1. Преобразуем произведение $a^{-17} \cdot a^{21}$.

▶ При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют тем же, а показатели степеней складывают. Имеем

$$a^{-17} \cdot a^{21} = a^{-17+21} = a^4.$$

Пример 2. Преобразуем частное $b^2 : b^5$.

▶ При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Имеем

$$b^2 : b^5 = b^{2-5} = b^{-3}. \triangleleft$$

Для степеней с натуральными и нулевым показателями мы могли применять правило деления степеней с одинаковыми основаниями в том случае, когда показатель степени делимого был не меньше показателя степени делителя. Теперь, после введения степеней с целыми показателями, это ограничение снимается: показатели степеней делимого и делителя могут быть любыми целыми числами.

Пример 3. Упростим выражение $(2a^3b^{-5})^{-2}$.

▶ Сначала применим свойство (4), а затем свойство (3).

Имеем

$$(2a^3b^{-5})^{-2} = 2^{-2} \cdot (a^3)^{-2}(b^{-5})^{-2} = \frac{1}{4}a^{-6}b^{10}. \triangleleft$$

Упражнения

985. Найдите значение выражения:

а) $3^{-4} \cdot 3^6$; г) $2^{10} : 2^{12}$; ж) $(2^{-4})^{-1}$;

б) $2^4 \cdot 2^{-3}$; д) $5^{-3} : 5^{-3}$; з) $(5^2)^{-2} \cdot 5^3$;

в) $10^8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}$; е) $3^{-4} : 3$; и) $3^{-4} \cdot (3^{-2})^{-4}$.

986. Вычислите:

а) $5^{-15} \cdot 5^{16}$; в) $4^{-8} : 4^{-9}$; д) $(2^{-2})^{-3}$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$; г) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^4$; е) $(0{,}1^{-3})^{-1}$.

987. Докажите, что степени любого отличного от нуля числа с противоположными показателями взаимно обратны.

988. Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ при любом целом n, $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

989. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; в) $0{,}01^{-2}$; д) $0{,}002^{-1}$;

б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4}$; е) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^{-5}$.

990. Представьте выражение в виде степени с основанием 3 и найдите его значение:
а) $27 \cdot 3^{-4}$; б) $(3^{-1})^5 \cdot 81^2$; в) $9^{-2} : 3^{-6}$; г) $81^3 : (9^{-2})^{-3}$.

991. Представьте выражение в виде степени с основанием 2 и найдите его значение:
а) $\frac{1}{16} \cdot 2^{10}$; б) $32 \cdot (2^{-4})^2$; в) $8^{-1} \cdot 4^3$; г) $4^5 \cdot 16^{-2}$.

992. Представьте выражение, в котором m — целое число, в виде степени с основанием 5:
а) $5^m \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m}$; б) $(5^m)^2 \cdot (5^{-3})^m$; в) $625 : 5^{4m-2}$.

993. Вычислите:
а) $8^{-2} \cdot 4^3$; г) $125^{-4} : 25^{-5}$; ж) $\frac{3^{-10} \cdot 9^8}{(-3)^2}$;
б) $9^{-6} \cdot 27^5$; д) $\frac{2^{-21}}{4^{-5} \cdot 4^{-6}}$; з) $\frac{5^{-5} \cdot 25^{10}}{125^3}$.
в) $10^0 : 10^{-3}$; е) $\frac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$;

994. Найдите значение выражения:
а) $125^{-1} \cdot 25^2$; в) $(6^2)^6 : 6^{14}$; д) $\frac{(2^3)^5 \cdot (2^{-6})^2}{4^2}$;
б) $16^{-3} \cdot 4^6$; г) $12^0 : (12^{-1})^2$; е) $\frac{(3^{-2})^3 \cdot 9^4}{(3^3)^2}$.

$\boxed{\textbf{995.}}$ Зная, что m — целое число, сократите дробь:
а) $\frac{25^m}{5^{2m-1}}$; б) $\frac{6^m}{2^{m-1} \cdot 3^{m+1}}$.

996. Представьте какими-либо тремя способами выражение x^{-10} в виде произведения степеней.

997. Представьте выражение a^{12}, где $a \neq 0$, в виде степени:
а) с основанием a^4; б) с основанием a^{-6}.

998. Представьте в виде степени с основанием x частное:
а) $x^{10} : x^{12}$;
б) $x^0 : x^{-5}$;
в) $x^{n-1} : x^{-8}$, где n — целое число;
г) $x^6 : x^{n+2}$, где n — целое число.

999. Упростите выражение:

а) $1{,}5ab^{-3}\cdot 6a^{-2}b$; г) $3{,}2x^{-1}y^{-5}\cdot \frac{5}{8}xy$;

б) $\frac{3}{4}m^{-2}n^{4}\cdot 8m^{3}n^{-2}$; д) $\frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}\cdot \frac{1}{6}p^{2}q^{-5}$;

в) $0{,}6c^{2}d^{4}\cdot \frac{1}{3}c^{-2}d^{-4}$; е) $3\frac{1}{3}a^{5}b^{-18}\cdot 0{,}6a^{-1}b^{20}$.

1000. Найдите значение выражения:

а) $0{,}2a^{-2}b^{4}\cdot 5a^{3}b^{-3}$ при $a=-0{,}125,\ b=8$;

б) $\frac{1}{27}a^{-1}b^{-5}\cdot 81a^{2}b^{4}$ при $a=\frac{1}{7},\ b=\frac{1}{14}$.

1001. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $1{,}6x^{-1}y^{12}\cdot 5x^{3}y^{-11}$ при $x=-0{,}2,\ y=0{,}7$;

б) $\frac{5}{6}x^{-3}y^{3}\cdot 30x^{3}y^{-4}$ при $x=127,\ y=\frac{1}{5}$.

1002. Представьте степень в виде произведения:

а) $(a^{-1}b^{-1})^{-2}$; в) $(0{,}5a^{-3}b^{5})^{-12}$; д) $\left(\frac{1}{3}p^{-2}q^{2}\right)^{-3}$;

б) $(x^{3}y^{-1})^{2}$; г) $(-2m^{5}n^{-3})^{2}$; е) $(-0{,}5x^{-3}y^{4})^{3}$.

1003. Преобразуйте в произведение:

а) $(6a^{-5}b)^{-1}$; б) $\left(\frac{3}{4}a^{-1}b^{-3}\right)^{-2}$; в) $\left(\frac{7}{8}p^{-6}q\right)^{-1}$; г) $(-0{,}3x^{-5}y^{4})^{-2}$.

1004. Представьте в виде степени произведения выражение:

а) $0{,}0001x^{-4}$; в) $0{,}0081a^{8}b^{-12}$;

б) $32y^{-5}$; г) $10^{n}x^{-2n}y^{3n}$, где n — целое число.

1005. Упростите выражение:

а) $\frac{12x^{-5}}{y^{-6}}\cdot\frac{y}{36x^{-9}}$; в) $\frac{5x^{-1}y^{3}}{3}\cdot\frac{9x^{6}}{y^{-2}}$;

б) $\frac{63a^{2}}{2b^{-5}}\cdot\frac{18b^{2}}{7a}$; г) $\frac{16p^{-1}q^{2}}{5}\cdot\frac{25p^{6}}{64q^{-8}}$.

1006. Преобразуйте выражение:

а) $\frac{13x^{-2}}{y}\cdot\frac{y^{12}}{39x^{-3}}$; в) $\frac{p}{3c^{-2}}\cdot\frac{15c}{p^{-2}}$;

б) $\frac{5a^{5}}{b^{-7}}\cdot\frac{7b^{-3}}{25a}$; г) $\frac{26x^{17}}{y^{-8}}\cdot\frac{y}{13x^{25}}$.

1007. Упростите выражение:

а) $(0{,}25x^{-4}y^{-3})^2 \cdot \left(\dfrac{x^{-3}}{4y^2}\right)^{-3}$; в) $\left(\dfrac{c^{-4}}{10a^5b^2}\right)^{-2} \cdot (5a^3bc^2)^{-2}$;

б) $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{3}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$; г) $\left(\dfrac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{x^2y^{-2}}{9z}\right)^2$.

1008. Преобразуйте выражение:

а) $\left(\dfrac{2x^{-1}}{3y^{-2}}\right)^{-2} \cdot 12xy^5$; в) $(2a^{-2}b^3)^2 \cdot \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-6}$;

б) $4a^7b^{-1} \cdot \left(\dfrac{ab}{5}\right)^{-1}$; г) $\left(\dfrac{2x^2}{y^3}\right)^{-1} \cdot (x^{-1}y)^3$.

1009. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $8x^2 - 6x + n = 0$ и $x_1^{-1} + x_2^{-1} = 6$. Найдите n.

1010. Решите уравнение:

$$\frac{2x-7}{x+1} + \frac{3x+2}{x-1} = 7.$$

1011. Найдите область определения функции:

а) $y = \dfrac{1}{|x| - x}$; б) $y = \dfrac{1}{|x| + x}$.

1012. Сократите дробь $\dfrac{\overline{ac}}{\overline{abc}}$, зная, что $b = a + c$.

39. Стандартный вид числа

В науке и технике встречаются как очень большие, так и очень малые положительные числа. Например, большим числом выражается объем Земли — 1 083 000 000 000 км^3, а малым — диаметр молекулы воды, который равен 0,0000000003 м.

В обычном десятичном виде большие и малые числа неудобно читать и записывать, неудобно выполнять над ними какие-либо действия. В таком случае полезным оказывается представление числа в виде $a \cdot 10^n$, где n — целое число. Например:

$$125\,000 = 0{,}125 \cdot 10^6;\ \ 0{,}0031 = 3{,}1 \cdot 10^{-3};$$
$$0{,}237 = 23{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Представим каждое из чисел 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в виде произведения числа, заключенного между единицей и десятью, и соответствующей степени числа 10:

$$1\,083\,000\,000\,000 = 1{,}083 \cdot 10^{12};$$
$$0{,}0000000003 = 3 \cdot 10^{-10}.$$

Говорят, что мы записали числа 1 083 000 000 000 и 0,0000000003 в *стандартном виде*. В таком виде можно представить любое положительное число.

Стандартным видом числа α называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число. Число n называется *порядком числа* α.

Например, порядок числа, выражающего объем Земли в кубических километрах, равен 12, а порядок числа, выражающего диаметр молекулы воды в метрах, равен -10.

Порядок числа дает представление о том, насколько велико или мало это число. Так, если порядок числа α равен 3, то это означает, что $1000 \leqslant \alpha \leqslant 10\,000$. Если порядок числа α равен -2, то $0{,}01 \leqslant \alpha < 0{,}1$. Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 1. Представим в стандартном виде число $\alpha = 4\,350\,000$.

▶ В числе α поставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна цифра. В результате получим 4,35. Отделив запятой 6 цифр справа, мы уменьшили число α в 10^6 раз. Поэтому α больше числа 4,35 в 10^6 раз. Отсюда

$$\alpha = 4{,}35 \cdot 10^6. \triangleleft$$

Пример 2. Представим в стандартном виде число $\alpha = 0{,}000508$.

▶ В числе α переставим запятую так, чтобы в целой части оказалась одна отличная от нуля цифра. В результате получится 5,08. Переставив запятую на четыре знака вправо, мы увеличили число α в 10^4 раз. Поэтому число α меньше числа 5,08 в 10^4 раз. Отсюда

$$\alpha = 5{,}08 : 10^4 = 5{,}08 \cdot \frac{1}{10^4} = 5{,}08 \cdot 10^{-4}. \triangleleft$$

Упражнения

1013. Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

а) $1{,}2 \cdot 10^9$; в) $2{,}7 \cdot 10^{-3}$; д) $4{,}42 \cdot 10^5$;

б) $3{,}6 \cdot 10^3$; г) $6{,}3 \cdot 10^{-1}$; е) $9{,}28 \cdot 10^{-4}$.

1014. Запишите в стандартном виде число:

а) 52 000 000; в) 675 000 000; д) 0,00281;

б) 2 180 000; г) 40,44; е) 0,0000035.

1015. Запишите в стандартном виде:

а) $45 \cdot 10^3$; б) $117 \cdot 10^5$; в) $0{,}74 \cdot 10^6$; г) $0{,}06 \cdot 10^5$.

1016. Представьте число в стандартном виде:

а) 1 024 000; в) 21,56; д) 0,000004; ж) $508 \cdot 10^{-7}$;

б) 6 000 000; г) 0,85; е) 0,000282; з) $0{,}042 \cdot 10^2$.

1017. Масса Земли приближенно равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т, а масса атома водорода 0,0000000000000000000000017 г. Запишите в стандартном виде массу Земли и массу атома водорода.

1018. Выразите:

а) $3{,}8 \cdot 10^3$ т в граммах; в) $8{,}62 \cdot 10^{-1}$ кг в тоннах;

б) $1{,}7 \cdot 10^{-4}$ км в сантиметрах; г) $5{,}24 \cdot 10^5$ см в метрах.

1019. Представьте:

а) $2{,}85 \cdot 10^8$ см в километрах; в) $6{,}75 \cdot 10^{15}$ г в тоннах;

б) $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ м в миллиметрах; г) $1{,}9 \cdot 10^{-2}$ т в килограммах.

1020. Выполните умножение:

а) $(3{,}25 \cdot 10^2) \cdot (1{,}4 \cdot 10^3)$; б) $(4{,}4 \cdot 10^{-3}) \cdot (5{,}2 \cdot 10^4)$.

1021. Какой путь пройдет свет за $2{,}8 \cdot 10^6$ с (скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/с)?

1022. Масса Земли $6{,}0 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Марса $6{,}4 \cdot 10^{23}$ кг. Что больше: масса Земли или масса Марса — и во сколько раз? Результат округлите до десятых.

1023. Масса Юпитера $1{,}90 \cdot 10^{27}$ кг, а масса Венеры $4{,}87 \cdot 10^{24}$ кг. Что меньше: масса Юпитера или масса Венеры — и во сколько раз? Результат округлите до единиц.

1024. Плотность железа $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите массу железной плиты, длина которой 1,2 м, ширина $6 \cdot 10^{-1}$ м и толщина $2{,}5 \cdot 10^{-1}$ м.

1025. Найдите значение выражения

$$(2 - \sqrt{3})\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}.$$

1026. При каком значении m сумма корней уравнения

$$3x^2 - 18x + m = 0$$

равна произведению этих корней?

1027. Найдите целые отрицательные значения x, которые являются решением неравенства

$$\frac{4 - 3x}{2} - x < 11.$$

Контрольные вопросы

- Сформулируйте определение степени с целым отрицательным показателем.
- Сформулируйте свойства произведения и частного степеней с одинаковыми основаниями и целыми показателями.
- Как возвести степень в степень?
- Как возвести произведение и частное в степень?
- Какую запись числа называют его стандартным видом?
- Покажите на примере, как представить число в стандартном виде.

§ 13 ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

40. Сбор и группировка статистических данных

Для изучения различных общественных и социально-экономических явлений, а также некоторых процессов, происходящих в природе, проводятся специальные статистические исследования. Всякое статистическое исследование начинается с целенаправленного сбора информации об изучаемом явлении или процессе. Этот этап называется этапом статистического наблюдения.

Для обобщения и систематизации данных, полученных в результате статистического наблюдения, их по какому-либо признаку разбивают на группы и результаты группировки сводят в таблицы.

Рассмотрим такой пример. Администрация школы решила проверить математическую подготовку восьмиклассников. С этой целью был составлен тест, содержащий 9 заданий. Работу выполняли 40 учащихся школы. При проверке каждой работы учитель отмечал число верно выполненных заданий. В результате был составлен такой ряд чисел:

6, 5, 4, 0, 4, 5, 7, 9, 1, 6, 8, 7, 9, 5, 8, 6, 7, 2, 5, 7,
6, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 6, 7, 7, 4, 3, 5, 9, 6, 7, 8, 6, 9, 8.

Для того чтобы удобно было анализировать полученные данные, упорядочим этот ряд:

0, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4,
5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6,
7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9.

Представим полученные данные в виде таблицы, в которой для каждого числа верно выполненных заданий, записанного в верхней строке, укажем в нижней строке количество появлений этого числа в ряду, т. е. *частоту*.

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частота	1	1	1	2	5	6	8	7	5	4

Такую таблицу называют *таблицей частот*.

В рассмотренном примере сумма частот равна общему числу проверяемых работ, т. е. 40.

Вообще, если результат исследования представлен в виде таблицы частот, то сумма частот равна общему числу данных в ряду.

При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к их анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются такие известные вам статистические характеристики, как среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Проанализируем результаты проведенной проверки работ учащихся.

Чтобы найти среднее арифметическое, надо общее число верно выполненных заданий разделить на число учащихся, т. е. 40. Получаем

$$\frac{0\cdot1+1\cdot1+2\cdot1+3\cdot2+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot8+7\cdot7+8\cdot5+9\cdot4}{40}=\frac{232}{40}=5{,}8.$$

Значит, в среднем учащиеся выполнили по 5,8 заданий, т. е. примерно две трети общего объема работы.

Наибольшее число верно выполненных учащимися заданий равно 9, а наименьшее равно 0. Значит, размах рассматриваемого ряда данных равен 9 – 0 = 9, т. е. различие в числе верно выполненных заданий достаточно велико. Из таблицы видно, что чаще всего встречаются работы, в которых верно выполнено 6 заданий, т. е. мода ряда равна 6.

Найдем медиану ряда. Так как в ряду всего 40 чисел, то медиана равна среднему арифметическому 20-го и 21-го членов соответствующего упорядоченного ряда. Для того чтобы определить, в какие группы попадают эти члены, будем последовательно суммировать частоты и сравнивать суммы с числами 20 и 21. Найдем, что $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 6 = 16$, $1 + 1 + 1 + 2 + 5 + 6 + 8 = 24$, т. е. 20-й и 21-й члены ряда попадают в ту группу, которую составляют учащиеся, верно выполнившие 6 заданий. Значит, медиана ряда равна $(6 + 6) : 2 = 6$.

В рассмотренном примере для анализа результатов выполнения учащимися теста была составлена таблица частот. Иногда составляют таблицу, в которой для каждого данного указывается не частота, а отношение частоты к общему числу данных в ряду. Это отношение, выраженное в процентах, называют *относительной частотой*, а саму таблицу — *таблицей относительных частот*.

В нашем примере общая численность данных — это число учащихся, писавших работу, т. е. 40. Таблица относительных частот выглядит следующим образом:

Число верно выполненных заданий	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Относительная частота, %	2,5	2,5	2,5	5	12,5	15	20	17,5	12,5	10

Нетрудно убедиться, что сумма относительных частот составляет 100%.

Вообще, если по результатам исследования составлена таблица относительных частот, то сумма относительных частот равна 100%.

Заметим, что если в ряду имеется большое число данных и одинаковые значения встречаются редко, то таблицы частот или относительных частот теряют наглядность и становятся излишне громоздкими. В таких случаях для анализа данных строят *интервальный ряд*. Для этого разность между наибольшим и наименьшим значениями делят на несколько равных частей (примерно 5—10) и, округляя полученный результат, определяют длину интервала. За начало первого интервала часто выбирают наименьшее данное или ближайшее к нему целое число, его не превосходящее. Для каждого интервала указывают число данных, попадающих в этот интервал, или выраженное в процентах отношение этого числа к общей численности данных. При этом граничное число обычно считают относящимся к последующему интервалу.

Пусть, например, на партии из 50 электроламп изучали продолжительность их горения (в часах). По результатам составили такую таблицу:

Продолжительность горения, ч	Частота
До 200	1
200—400	3
400—600	5
600—800	9
800—1000	16
1000—1200	9
1200—1400	5
1400—1600	2

Пользуясь составленной таблицей, найдем среднюю продолжительность горения. Для этого составим новую таблицу частот, заменив каждый интервал числом, которое является его серединой.

Продолжительность горения, ч	Частота
100	1
300	3
500	5
700	9
900	16
1100	9
1300	5
1500	2

Для получения ряда данных найдем среднее арифметическое:

$$(100 \cdot 1 + 300 \cdot 3 + 500 \cdot 5 + 700 \cdot 9 + 900 \cdot 16 + 1100 \cdot 9 + 1300 \cdot 5 + \\ + 1500 \cdot 2) : 50 \approx 870 \text{ (с точностью до десятков).}$$

Значит, средняя продолжительность горения электроламп приближенно равна 870 ч.

В рассмотренном в начале пункта примере были проанализированы результаты выполнения теста восьмиклассниками одной школы. Тот же тест можно было бы использовать для более широкой проверки математической подготовки учащихся, например предложить его восьмиклассникам всех школ города или региона. Заметим, что организация такой проверки связана с серьезными трудностями по пересылке текстов заданий в школы, сбору и проверке работ учащихся, обработке полученных результатов. Вообще проведение любого массового исследования требует больших организационных усилий и финансовых затрат. Например, перепись населения страны связана с подготовкой разнообразной документации, выделением и инструктажем переписчиков, сбором информации, обработкой собранных сведений.

В тех случаях, когда бывает сложно или даже невозможно провести сплошное исследование, его заменяют *выборочным*. При выборочном исследовании из всей изучаемой совокупности данных, называемой *генеральной совокупностью*, выбирается определенная ее часть, т. е. составляется *выборочная совокупность (выборка)*, которая подвергается исследованию. При этом выборка должна быть *представительной*, или, как говорят, *репрезентативной*, т. е. достаточной по объему и отражающей характерные особенности исследуемой генеральной совокупности.

Пусть, например, в ходе кампании по выборам мэра в городе со стотысячным населением хотят узнать, кто из кандидатов имеет наибольшие шансы на успех. Для этого проводят опрос, например, полутора тысяч избирателей, в ходе которого выясняется, за кого они собираются голосовать. При этом нельзя опрашивать только молодых избирателей или только пенсионеров, так как это может привести к неправильным выводам. Необходимо, чтобы среди опрашиваемых было примерно одинаковое число мужчин и женщин. Кроме того, должны быть представлены люди с разным социальным положением и образованием.

Выборочное исследование проводят также и тогда, когда проведение сплошного исследования связано с порчей или уничтожением продукции. Например, при исследовании продолжительности горения партии электроламп, выпущенных заводом, невозможно проверить всю партию, так как это привело бы просто к ее уничтожению.

Упражнения

1028. На выборах мэра города будут баллотироваться три кандидата: Алексеев, Иванов, Карпов (обозначим их буквами А, И, К). Проводя опрос 50 избирателей, выяснили, за кого из кандидатов они собираются голосовать. Получили следующие данные:

И, А, И, И, К, К, И, И, И, А, К, А, А, А, К, К, И, К, А, А, И, К, И, И, К, И, К, А, И, И, И, А, И, И, К, И, А, И, К, К, И, К, А, И, И, И, А, А, К, И.

Представьте эти данные в виде таблицы частот. Достаточно ли этих данных, чтобы сделать вывод о предстоящих результатах голосования?

1029. В ходе опроса 40 учащихся школы было выяснено, сколько времени (с точностью до 0,5 ч) в неделю они затрачивают на занятия в кружках и спортивных секциях. Получили следующие данные:

5, 1,5, 0, 2,5, 1, 0, 0, 2, 2,5, 3,5,
4, 5, 3,5, 2,5, 0, 1,5, 4,5, 3, 3, 5,
3,5, 4, 3,5, 3, 2,5, 2, 1, 2, 2, 4,5,
4, 3,5, 2, 5, 4, 2, 2,5, 0, 0, 3.

Представьте этот ряд данных в виде таблицы частот.

1030. Учащимся восьмых классов школ некоторого города была предложена контрольная работа по алгебре, содержащая 6 заданий. При подведении итогов составили таблицу, в которой указали число учащихся, верно выполнивших одно, два, три и т. д. задания.

Число выполненных заданий	Число учащихся
0	—
1	27
2	53
3	87
4	223
5	146
6	89

Пользуясь этой таблицей, составьте таблицу относительных частот (с точностью до 1%).

1031. При проверке 70 работ по русскому языку отмечали число орфографических ошибок, допущенных учащимися. Полученный ряд данных представили в виде таблицы частот.

Число ошибок	0	1	2	3	4	5	6
Частота	4	6	15	26	12	4	3

Каково наибольшее различие в числе допущенных ошибок? Какое число ошибок является типичным для данной группы учащихся? Какие статистические характеристики были использованы при ответе на поставленные вопросы?

1032. Ряд данных о количестве акций одинаковой стоимости, приобретенных сотрудниками лаборатории, представлен в виде таблицы частот.

Число акций	Частота
2	20
5	12
10	7
25	4
100	2

Найдите для этого ряда данных среднее арифметическое, размах и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

1033. При изучении качества продукции, выпущенной цехом, определяли число бракованных деталей в каждом из 50 произвольным образом выбранных ящиков с одинаковым числом деталей. Получили такую таблицу:

Число бракованных деталей	0	1	2	3	4
Число ящиков	8	22	13	5	2

Найдите среднее арифметическое, размах и моду полученного ряда данных. Что характеризует каждый из этих показателей?

1034. Определяя степень засоренности цветочных семян, выясняли, сколько семян сорных растений содержится в каждом из 100 произвольным образом выбранных пакетов с одинаковым числом семян. Получили такую таблицу:

Число семян сорных растений	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Число пакетов	3	16	26	17	18	10	3	5	1	1

Для полученного ряда данных найдите среднее арифметическое и моду. Что характеризует каждый из этих показателей?

1035. При изучении учебной нагрузки учащихся попросили 24 восьмиклассников указать время (с точностью до 1 мин), которое они затратили в определенный день на выполнение домашнего задания по алгебре. Получили следующие данные:

27, 25, 31, 32, 34, 16, 18, 39,
26, 34, 32, 29, 19, 15, 37, 36,
31, 29, 28, 15, 31, 34, 22, 28.

Представьте полученные данные в виде интервального ряда с интервалами длиной 5 мин.

1036. Имеются следующие данные о среднесуточной переработке сахара (в тыс. ц) заводами сахарной промышленности некоторого региона:

Суточная переработка сахара, тыс. ц	12—15	15—18	18—21
Число заводов	4	6	3

Заменяя каждый интервал его серединой, найдите, сколько сахара в среднем перерабатывал в сутки завод региона.

1037. Является ли выборка представительной, если при изучении времени, которое затрачивают на выполнение уроков восьмиклассники:

а) опрашивали только девочек;
б) опрос проводили только по четвергам;
в) опрашивали только учащихся гимназий и лицеев?

1038. В ходе опроса предстоит определить, строительству каких культурных и спортивных сооружений отдают предпочтение жители района. Какие категории жителей должны быть включены, на ваш взгляд, в составляемую выборку?

$\boxed{\textbf{1039.}}$ Найдите сумму квадратов корней уравнения $x^2 + 12x + 30 = 0$.

1040. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 0{,}5(2 - x) - 1{,}5x < 6x - 1, \\ 1{,}3(2 + x) + 0{,}7x < 3x + 2{,}4. \end{cases}$$

1041. Упростите выражение

$$2\sqrt{5}(\sqrt{2} - \sqrt{5}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2})^2.$$

41. Наглядное представление статистической информации

Для наглядного представления данных, полученных в результате статистического исследования, широко используются различные способы их изображения.

Одним из хорошо известных вам способов наглядного представления ряда данных является построение столбчатой диаграммы.

Столбчатые диаграммы используют тогда, когда хотят проиллюстрировать динамику изменения данных во времени или распределение данных, полученных в результате статистического исследования.

В таблице показан расход электроэнергии (с точностью до 5 кВт · ч) некоторой семьей в течение года.

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Расход электроэнергии, кВт · ч	110	100	110	85	70	65	10	70	90	100	100	105

Соответствующая столбчатая диаграмма построена на рисунке 49. Она состоит из 12 прямоугольников, расположенных на одинаковом расстоянии друг от друга. Равные основания прямоугольников выбирают произвольно, а высота каждого из них равна (при выбранном масштабе) расходу электроэнергии в указанном месяце.

Если в ходе статистического исследования проведена группировка одинаковых данных и для каждой группы указана соответствующая частота (или относительная частота), то каждая группа изображается на столбчатой диаграмме прямоугольником, высота которого при выбранном масштабе равна соответствующей частоте (или относительной частоте).

Для наглядного изображения соотношения между частями исследуемой совокупности удобно использовать *круговые диаграммы*.

Если результат статистического исследования представлен в виде таблицы относительных частот, то для построения круговой диаграммы круг разбивается на секторы, центральные углы которых пропорциональны относительным частотам, определенным для каждой группы данных.

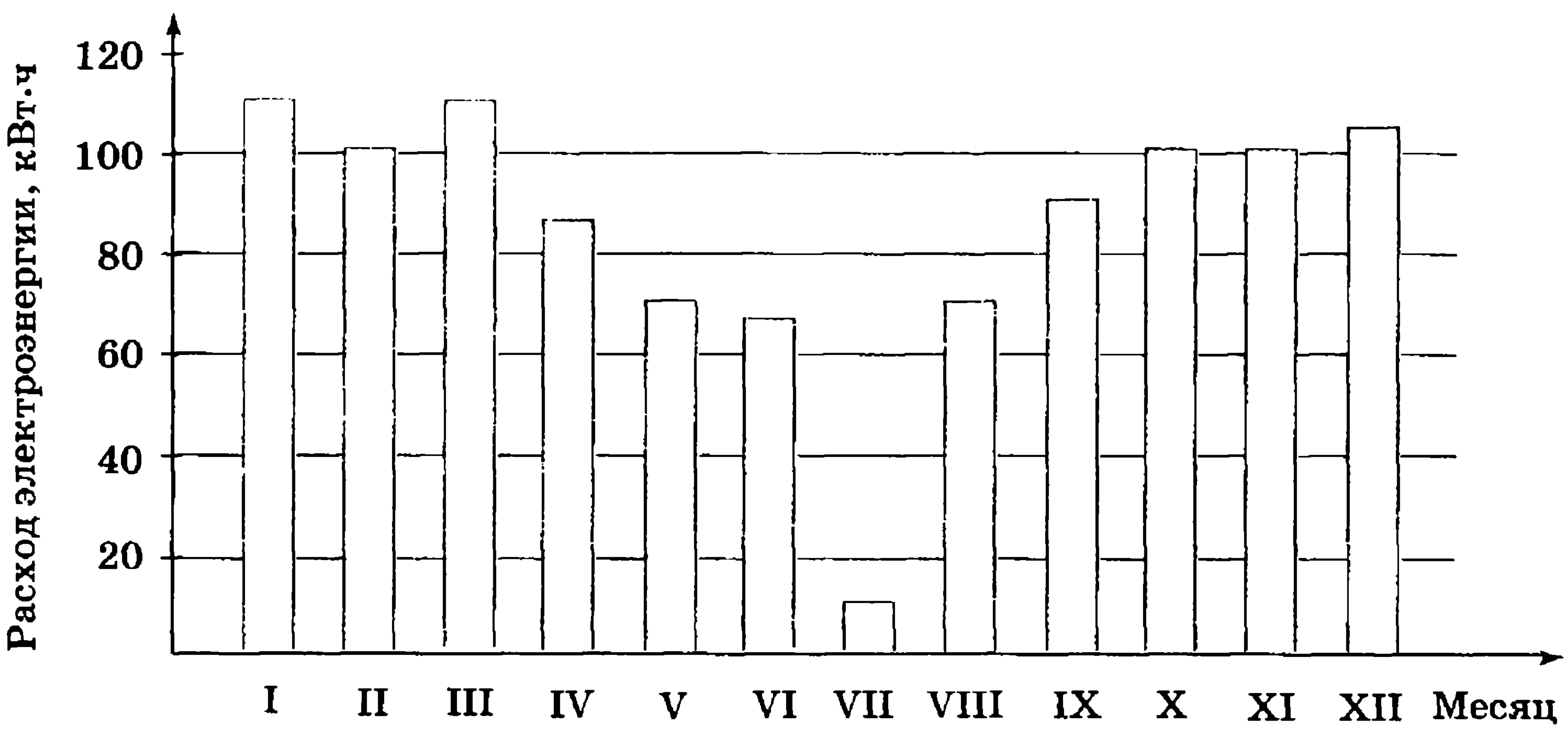


Рис. 49

Построим, например, круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение рабочих цеха по тарифным разрядам, представленное в следующей таблице:

Разряд	Относительная частота, %
3	12
4	42
5	29
6	17

Так как $360° : 100 = 3{,}6°$, то одному проценту соответствует центральный угол, равный $3{,}6°$. Учитывая это, определим для каждой группы соответствующий центральный угол:

$$3{,}6° \cdot 12 = 43{,}2°, \quad 3{,}6° \cdot 42 = 151{,}2°,$$
$$3{,}6° \cdot 29 = 104{,}4°, \quad 3{,}6° \cdot 17 = 61{,}2°.$$

Разбив круг на секторы, получим круговую диаграмму, изображенную на рисунке 50.

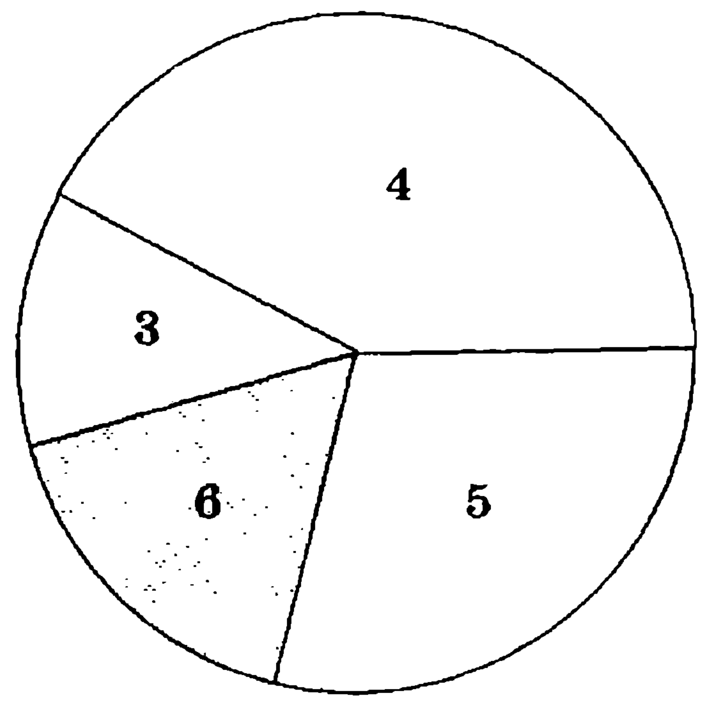


Рис. 50

Заметим, что круговая диаграмма сохраняет свою наглядность и выразительность лишь при небольшом числе частей совокупности. В противном случае ее применение малоэффективно.

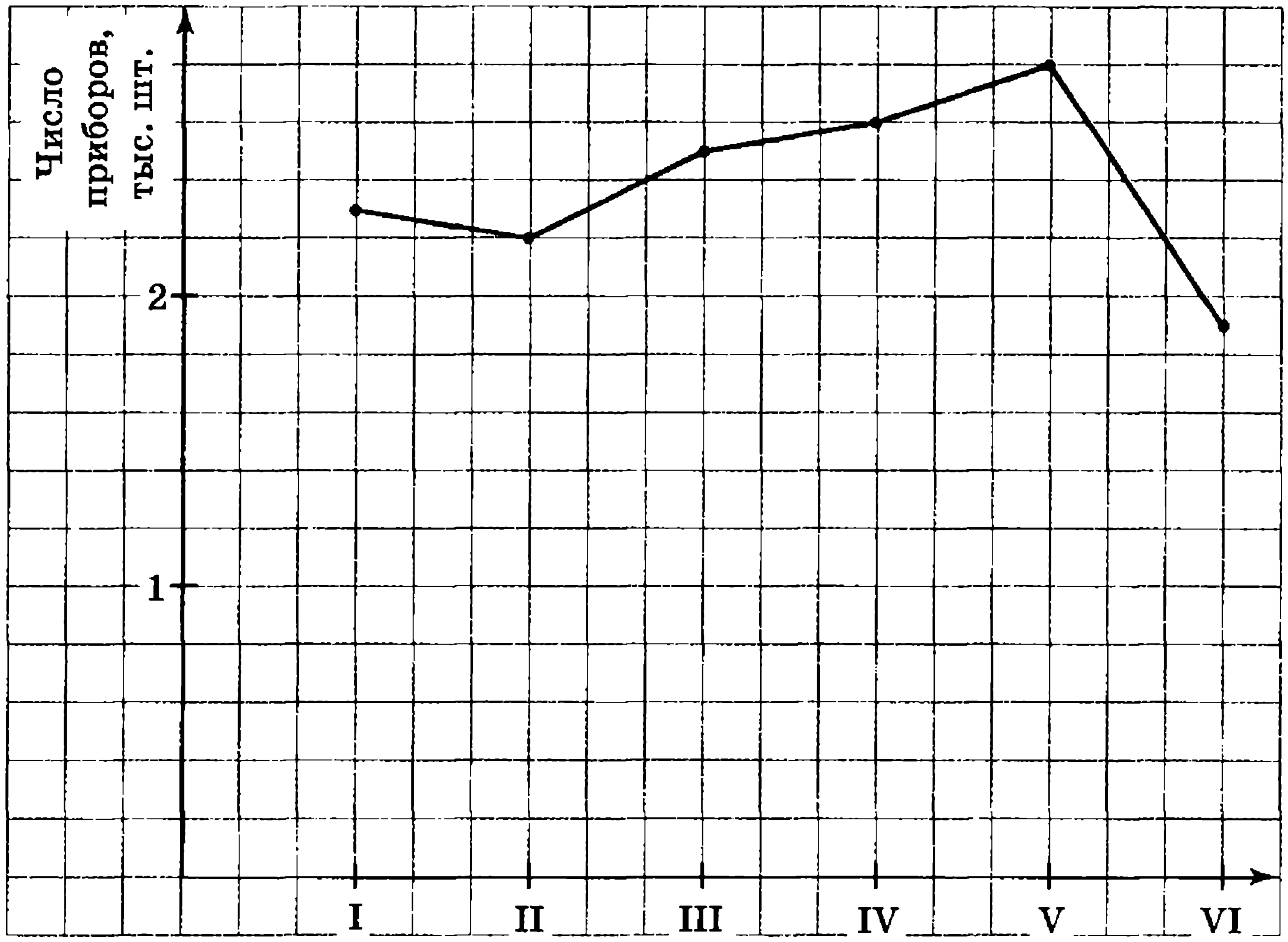
Динамику изменения статистических данных во времени часто иллюстрируют с помощью *полигона*. Для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат моменты времени, а ординатами — соответствующие им статистические данные. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают ломаную, которую называют полигоном.

Имеются, например, следующие данные о производстве заводом приборов в первом полугодии 2006 г. (по месяцам):

Месяц	I	II	III	IV	V	VI
Число приборов, тыс. шт.	2,3	2,2	2,5	2,6	2,8	1,9

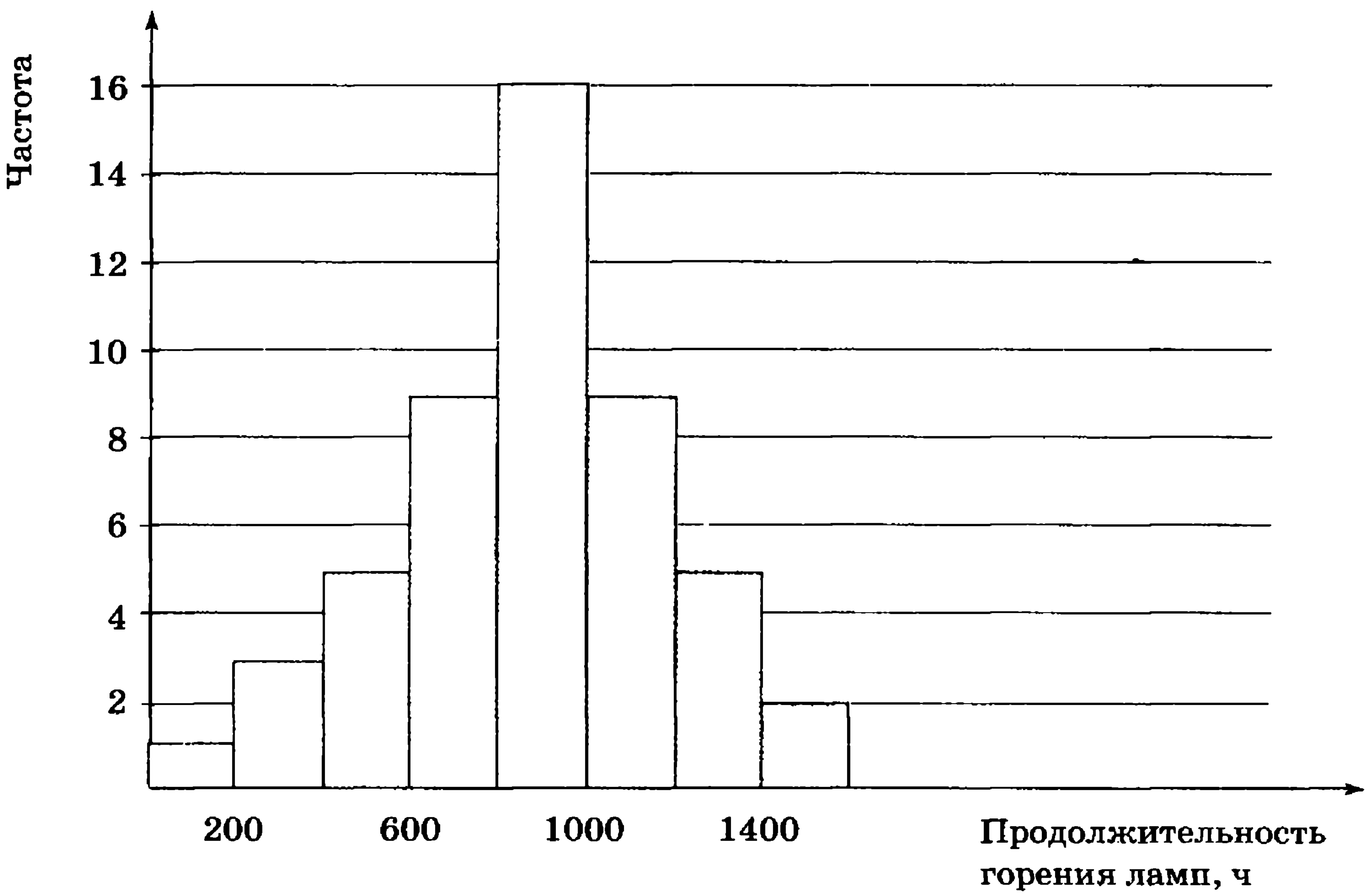
Полигон, иллюстрирующий производство заводом приборов в первом полугодии 2006 г., построен на рисунке 51 (см. с. 224).

Полигоны используют также для наглядного изображения распределения данных, полученных в результате статистического исследования.



Число приборов, тыс. шт.
2
1
I
II
III
IV
V
VI

Рис. 51



Частота
16
14
12
10
8
6
4
2
200
600
1000
1400
Продолжительность горения ламп, ч

Рис. 52

Если данные представлены в виде таблицы частот или относительных частот, то для построения полигона отмечают в координатной плоскости точки, абсциссами которых служат статистические данные, а ординатами — их частоты или относительные частоты. Соединив последовательно эти точки отрезками, получают полигон распределения данных.

Интервальные ряды данных изображают с помощью *гистограмм*. Гистограмма представляет собой ступенчатую фигуру, составленную из сомкнутых прямоугольников. Основание каждого прямоугольника равно длине интервала, а высота — частоте или относительной частоте. Таким образом, в гистограмме, в отличие от обычной столбчатой диаграммы, основания прямоугольников выбираются не произвольно, а строго определены длиной интервала.

Построим, например, гистограмму для интервального ряда, характеризующего продолжительность горения 50 электроламп, воспользовавшись таблицей, приведенной на с. 217. Пусть единица на горизонтальной оси соответствует продолжительности горения в 200 ч, а единица на вертикальной оси — частоте, равной 1. Гистограмма представляет собой фигуру, составленную из восьми сомкнутых прямоугольников (рис. 52). Сумма высот прямоугольников равна общей численности исследуемой совокупности, т. е. 50.

Упражнения

1042. По четвертным оценкам по геометрии учащиеся одного класса распределились следующим образом:
«5» — 4 ученика,
«4» — 10 учеников,
«3» — 18 учеников,
«2» — 2 ученика.
Постройте столбчатую диаграмму, характеризующую распределение учащихся по четвертным оценкам по геометрии.

1043. Изучая профессиональный состав рабочих механического цеха, составили таблицу:

Профессия	Число рабочих
Наладчик	4
Револьверщик	2
Сверловщик	1
Слесарь	8
Строгальщик	3
Токарь	12
Фрезеровщик	5

Постройте столбчатую диаграмму, характеризующую профессиональный состав рабочих этого цеха.

1044. В фермерском хозяйстве площади, отведенные под посевы зерновых, распределены следующим образом:

пшеница — 63%, овес — 16%, просо — 12%, гречиха — 9%.

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение площадей, отведенных под зерновые.

1045. В результате статистического исследования были получены следующие данные о распределении пассажиропотока в московском авиаузле в 2003 году:

Внуково — 12%, Домодедово — 40%, Шереметьево — 48%.

Постройте круговую диаграмму, иллюстрирующую распределение пассажиропотока.

1046. В таблице показано распределение 43 хозяйств района по урожайности зерновых в некотором году.

Урожайность, ц/га	Число хозяйств
18	3
19	9
20	13
21	11
22	7

Постройте полигон распределения хозяйств по урожайности зерновых.

1047. При изучении распределения семей, проживающих в доме, по количеству членов семьи была составлена таблица, в которой для каждой семьи с одинаковым числом членов указана относительная частота.

Количество членов семьи	Относительная частота, %
1	10
2	18
3	35
4	26
5 и более	11

Пользуясь данной таблицей, постройте полигон относительных частот.

1048. В таблице приведены значения среднемесячных температур воздуха (в градусах Цельсия) в городе за год.

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Среднемесячная температура, °C	−16	−10	−6	4	8	16	22	19	10	6	−3	−11

Постройте полигон, иллюстрирующий изменения среднемесячных температур за год.

1049. На рисунке 53 построен полигон, иллюстрирующий производство растительного масла в России в 1992 и 1993 гг. (по кварталам). Пользуясь рисунком:

а) охарактеризуйте динамику изменения производства растительного масла в 1992 и 1993 гг.;

б) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошло наибольшее падение производства растительного масла;

в) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошел наибольший прирост производства растительного масла.

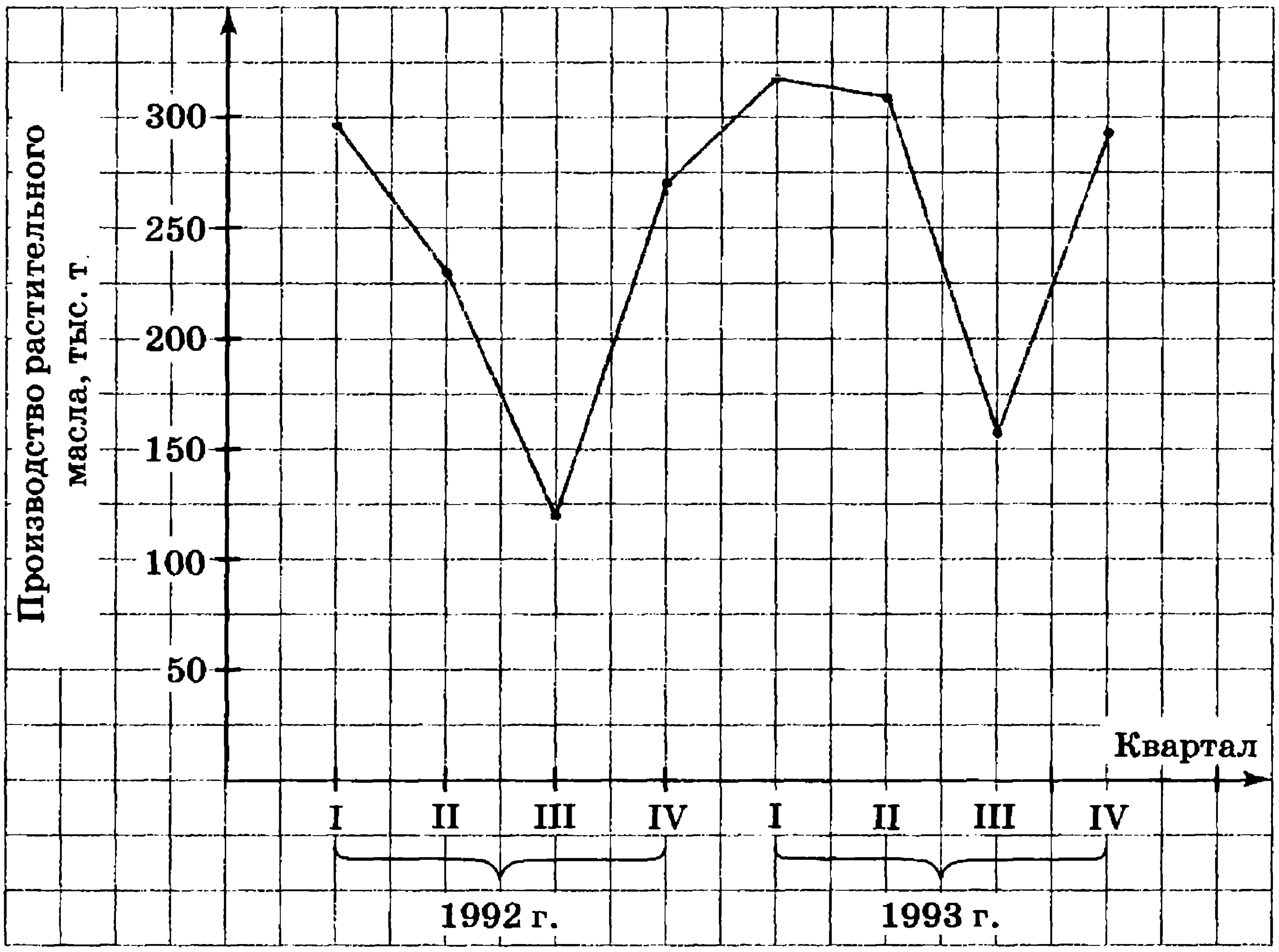


Рис. 53

1050. В таблице показано, сколько курток изготовила мастерская за каждый квартал 2004 и 2005 гг.

Год	2004				2005			
Квартал	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Число курток	780	625	645	810	850	760	720	910

Постройте полигон, иллюстрирующий выработку мастерской в 2004 и в 2005 гг. (по кварталам).

Используя построенный полигон:

а) охарактеризуйте динамику изменения производства курток в 2004 и 2005 гг. (по кварталам);

б) укажите два квартала, следующие друг за другом, когда произошло наибольшее увеличение выработки.

1051. На рисунке 54 построены полигоны, иллюстрирующие продажу магазином в течение недели компьютеров (сплошная линия) и телевизоров (пунктирная линия). Укажите два дня, следующие друг за другом, когда:

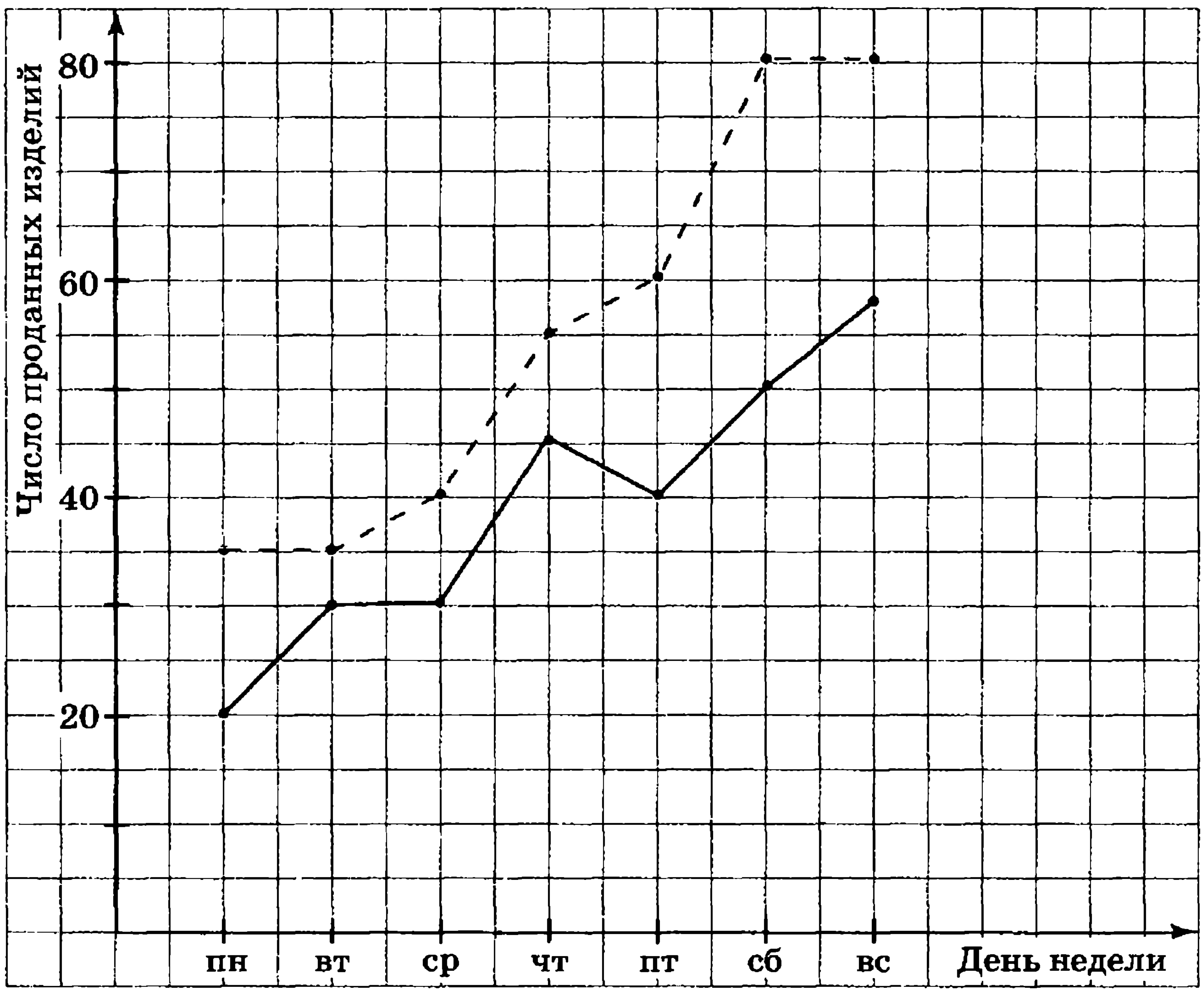


Рис. 54

а) число проданных телевизоров возросло больше, чем число проданных компьютеров;

б) число проданных телевизоров возросло, а число проданных компьютеров уменьшилось;

в) число проданных компьютеров возросло, а число проданных телевизоров осталось тем же.

1052. На основе опроса была составлена следующая таблица распределения учащихся по времени, которое они затратили в определенный учебный день на просмотр телепередач:

Время, ч	Частота
0—1	12
1—2	24
2—3	8
3—4	5

Пользуясь таблицей, постройте соответствующую гистограмму.

1053. В таблице показано распределение призывников района по росту.

Рост, см	Частота
155—160	6
160—165	10
165—170	28
170—175	36
175—180	48
180—185	26
185—190	16
190—195	8

Постройте гистограмму, характеризующую распределение призывников по росту.

1054. На гистограмме (см. рис. 55 на с. 230) представлены данные о распределении рабочих цеха по возрастным группам. Пользуясь гистограммой, найдите:

а) число рабочих цеха в возрасте от 18 до 23 лет;

б) возрастную группу, к которой относится наибольшее число рабочих;

в) общее число рабочих цеха.

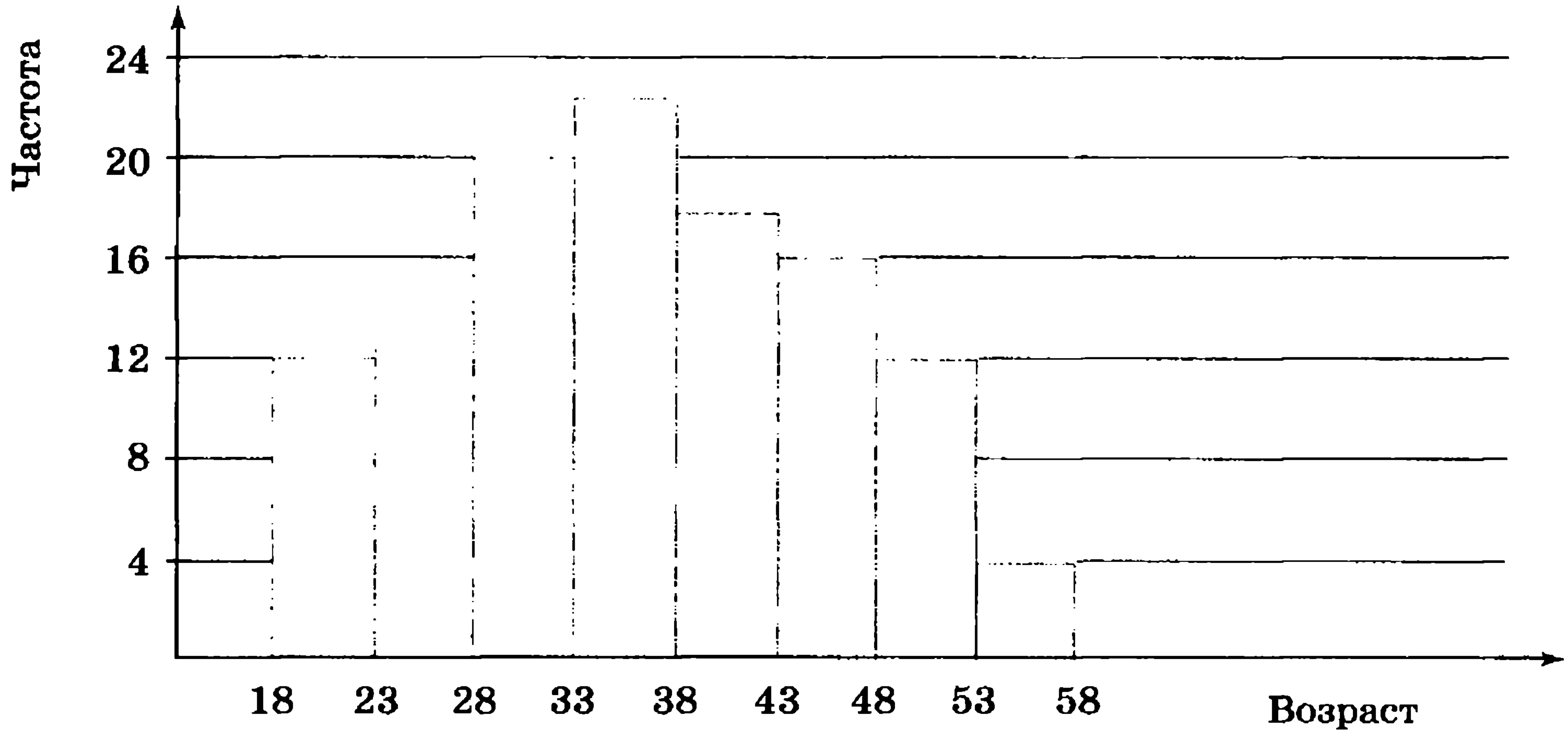


Рис. 55

1055. В оздоровительном лагере были получены следующие данные о весе 30 мальчиков (с точностью до 0,1 кг):

21,8, 29,3, 30,2, 20,6, 23,8,
29,5, 28,6, 20,8, 28,4, 30,7,
23,9, 25,0, 25,5, 28,2, 22,5,
21,4, 24,5, 24,8, 29,6, 31,3,
26,3, 26,8, 23,2, 27,5, 28,8,
23,6, 22,8, 30,3, 23,5, 27,3.

Используя эти данные, заполните таблицы (перечертив их в тетрадь).

Вес, кг	Частота
20—22	
22—24	
24—26	
26—28	
28—30	
30—32	

Вес, кг	Частота
20—23	
23—26	
26—29	
29—32	

По данным этих таблиц постройте на разных рисунках в одном и том же масштабе две гистограммы. Что общего у этих гистограмм и чем они различаются?

1056. Наблюдая за работой бригады токарей, установили, сколько времени тратили они на обработку одной детали. Обобщая полученные данные, составили таблицу:

Время, мин	Число токарей
10—12	2
12—14	6
14—16	11
16—18	7
18—20	5

Пользуясь таблицей, постройте гистограмму, характеризующую распределение токарей бригады по времени, затрачиваемому на обработку одной детали.

1057. Докажите тождество:

а) $\left(\dfrac{a+1}{a^2+1-2a}+\dfrac{1}{a-1}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a-1}\right)^{-1}-\dfrac{2}{a-1}=0;$

б) $\left(\dfrac{1+x}{x^2-xy}+\dfrac{1-y}{y^2-xy}\right)\cdot\left(\dfrac{x+y}{x^2y-y^2x}\right)^{-1}=1;$

в) $3a\left(\dfrac{1}{a-c}-\dfrac{c}{a^3-c^3}\cdot\dfrac{a^2+c^2+ac}{a+c}\right)-\left(\dfrac{a^2-c^2}{3c^2}\right)^{-1}=3.$

1058. Найдите значение выражения

$$(9-4a^2)\left(\frac{4a}{2a-3}-1\right)\text{ при } a=-1{,}2.$$

1059. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{10}-\dfrac{x}{6}\leqslant\dfrac{x}{10}+\dfrac{1-x}{30},\\[2mm] \dfrac{x}{3}-\dfrac{x+5}{12}<\dfrac{x}{4}-\dfrac{x-5}{24}.\end{cases}$$

1060. Сравните значения выражений:

а) $5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$ и $3\sqrt{7}+\sqrt{45}$; б) $6\sqrt{2}-2\sqrt{7}$ и $4\sqrt{3}-\sqrt{28}$.

1061. Сравните числа:

а) $0{,}987^{-1}$ и 1; б) $1{,}074^{-1}$ и 1.

Контрольные вопросы

Объясните на примере, как по таблице частот находят среднее арифметическое, размах и моду.

Какие способы наглядного представления статистической информации вам известны? Объясните, в чем состоит каждый из этих способов.

Что называется гистограммой? Как изображается на гистограмме общий объем исследуемой совокупности?

Для тех, кто хочет знать больше

42. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства

Функции, которые можно задать формулой вида $y = x^n$, где x — независимая переменная и n — целое число, называют степенными функциями с целым показателем.

Со степенными функциями $y = x^2$ и $y = x^3$ вы познакомились в курсе алгебры 7 класса. Вам знакома также степенная функция $y = x$, которая является частным случаем прямой пропорциональности $y = kx$ (при $k = 1$).

Рассмотрим теперь функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$, выясним свойства этих функций и особенности их графиков. Отметим сразу, что областью определения каждой из этих функций является множество действительных чисел, кроме нуля.

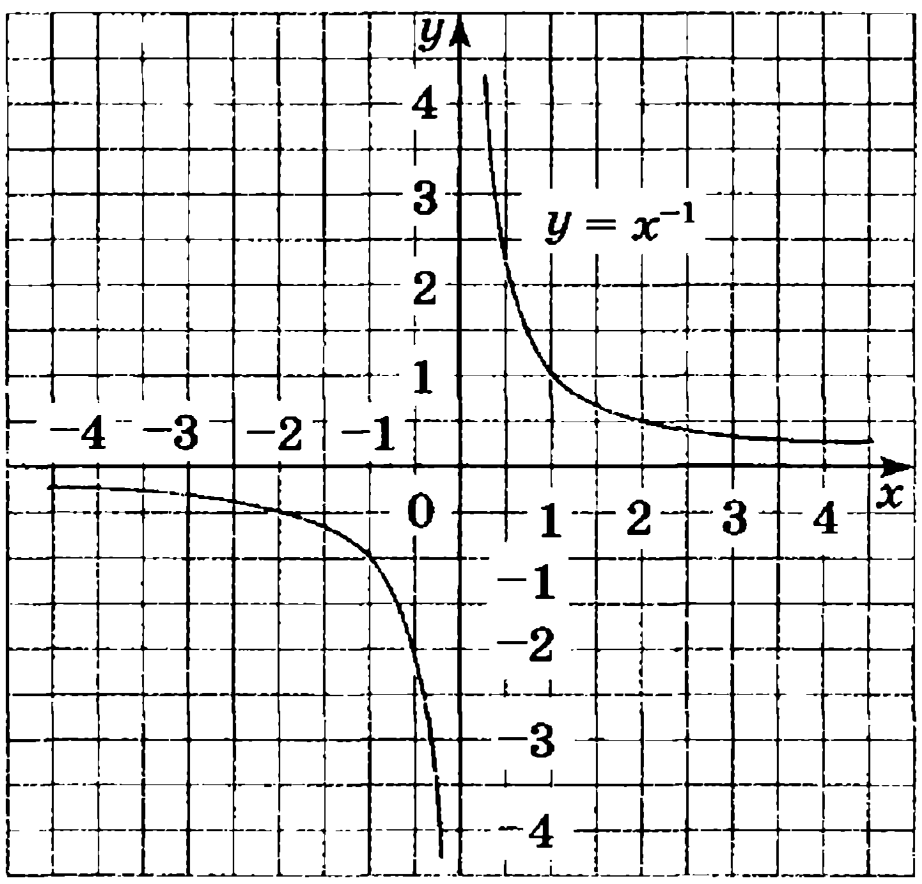


Рис. 56

Перечислим *свойства* функции $y = x^{-1}$ и особенности ее графика.

1. Если $x > 0$, то $y > 0$; если $x < 0$, то $y < 0$.

Это следует из формулы $y = x^{-1}$: значения x и y одного знака.

Так как $x^{-1} = \frac{1}{x}$, то графиком функции является гипербола, расположенная в первой и третьей четвертях координатной плоскости (рис. 56).

2. Противоположным значениям аргумента соответствуют противоположные значения функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то соответствующие им значения функции x_0^{-1} и $(-x_0)^{-1}$ также являются противоположными числами, так как $x_0^{-1} = \frac{1}{x_0}$ и $(-x_0)^{-1} = -\frac{1}{x_0}$.

Если точка $M(x_0;\ y_0)$ принадлежит графику функции, то точка $M'(-x_0;\ -y_0)$ также принадлежит графику этой функции. Значит, каждой точке $M(x_0;\ y_0)$ графика соответствует точка $M'(-x_0;\ -y_0)$ того же графика. Точки, имеющие противоположные абсциссы и противоположные ординаты, симметричны относительно начала координат. Следовательно, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно начала координат.

3. Если значения аргумента при $x > 0$ неограниченно возрастают ($x \to +\infty$), **то соответствующие им значения функции убывают,** т. е. стремятся к нулю ($y \to 0$). **Если значения аргумента при $x > 0$ убывают,** т. е. стремятся к нулю ($x \to 0$), **то соответствующие значения функции неограниченно возрастают** ($y \to +\infty$). Если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x < 0$ и $x \to 0$, то $y \to -\infty$.

Таким образом, точки графика, удаляясь от оси y вправо или влево, все ближе приближаются к оси x, а удаляясь от оси x вверх или вниз, все ближе приближаются к оси y.

Отметим еще одно свойство функции $y = x^{-1}$.

4. Значения аргумента и соответствующие им значения функции являются взаимно обратными числами.

Действительно, при любых значениях аргумента x верно равенство $xy = 1$. А это означает, что значения x и y являются взаимно обратными числами.

Если точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику данной функции, то точка $M'(b;\ a)$ также принадлежит графику этой функции. Точки $M(a;\ b)$ и $M'(b;\ a)$ симметричны относительно прямой $y = x$. Значит, график функции $y = x^{-1}$ симметричен относительно прямой $y = x$.

Выясним теперь *свойства* функции $y = x^{-2}$ и особенности ее графика.

1. При любом значении аргумента значения функции — положительные числа.

Это следует из того, что $x^{-2} > 0$ при любом $x \neq 0$. Значит, график функции $y = x^{-2}$ расположен выше оси x.

2. Любым противоположным значениям аргумента соответствует одно и то же значение функции.

Действительно, если x_0 и $-x_0$ — значения аргумента, то x_0^{-2} и $(-x_0)^{-2}$ — соответствующие им значения функции, но $x_0^{-2} = (-x_0)^{-2}$.

Отсюда следует, что каждой точке $M(x_0; y_0)$ графика функции соответствует точка $M'(-x_0; y_0)$ того же графика. Значит, график функции $y = x^{-2}$ симметричен относительно оси y.

3. Если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, то $y \to 0$; если $x \to 0$, то $y \to +\infty$.

Действительно, если $|x|$ неограниченно возрастает ($|x| \to +\infty$), то $|x^{-2}|$ убывает, оставаясь положительным числом, т. е. y стремится к нулю. Если $|x| \to 0$, то x^{-2} неограниченно возрастает, т. е. $x^{-2} \to +\infty$.

Основываясь на этих свойствах, можно построить график функции $y = x^{-2}$.

Вычислим значения y для некоторых положительных значений аргумента.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	9	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

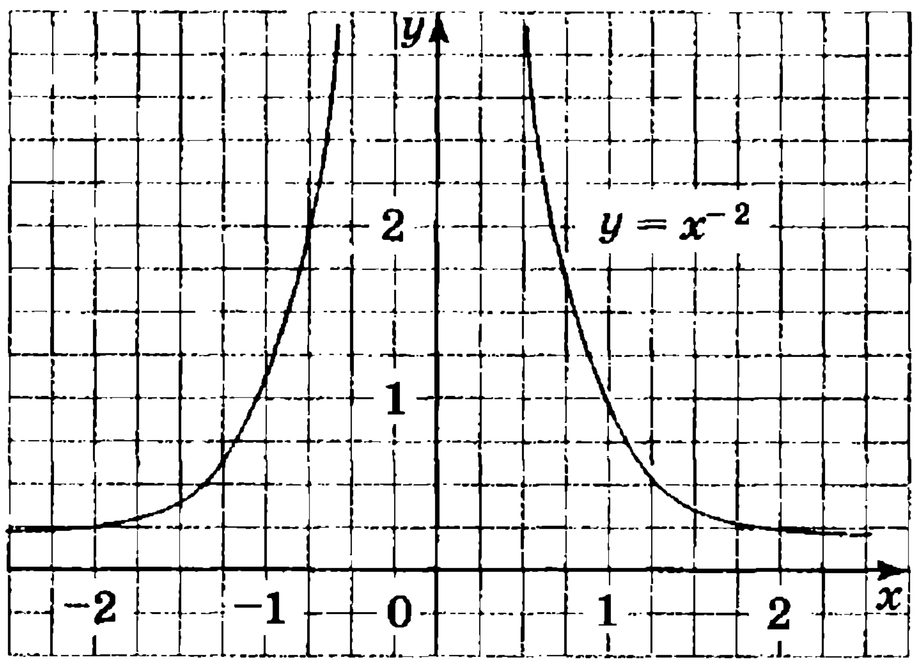


Рис. 57

Построим в координатной плоскости точки, координаты которых помещены в таблице. Соединив эти точки плавной непрерывной линией, получим одну ветвь графика функции. Вторую ветвь, расположенную во второй координатной четверти, построим симметрично первой относительно оси y. График функции $y = x^{-2}$ изображен на рисунке 57.

Упражнения

1062. Известно, что точки $A\left(a; \frac{1}{247}\right)$ и $B(843; b)$ принадлежат гиперболе $y = x^{-1}$. Найдите a и b.

1063. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x$ и $y = x^{-1}$. Выясните, при каких значениях аргумента верны равенство $x = x^{-1}$ и неравенства $x > x^{-1}$ и $x < x^{-1}$ в случае, если:

а) $x > 0$; б) $x < 0$.

1064. Докажите, что прямая $y = -x + l$, где l — некоторое положительное число, и гипербола $y = x^{-1}$:

а) имеют две общие точки, если $l > 2$;
б) имеют одну общую точку, если $l = 2$;
в) не имеют общих точек, если $l < 2$.

1065. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^{-1}, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Найдите:
а) значение y, если $x = -2$; 2;
б) значение x, при котором $y = -4$; 4.

1066. Постройте график функции $y = |x^{-1}|$. Как расположен этот график относительно оси y?

1067. Постройте в одной системе координат графики функций $y = x^{-1}$, где $x > 0$, и $y = x^{-2}$, где $x > 0$. Сравните значения x^{-1} и x^{-2}, если:

а) $0 < x < 1$; б) $x > 1$.

1068. Известно, что точки $A\left(a; \dfrac{1}{2601}\right)$ и $B(0{,}0625;\ b)$ принадлежат графику функции $y = x^{-2}$. Найдите a и b.

1069. Расположите в порядке возрастания числа x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}, зная, что:
а) $0 < x_0 < 1$; б) $x_0 > 1$.

1070. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^{-2}, \text{ если } -2 \leqslant x < -1, \\ x^2, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^{-2}, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Сколько общих точек имеет этот график с прямой $y = a$ в случае, когда:

а) $a = 2$; б) $a = 1$; в) $a = \frac{1}{2}$; г) $a = 0$?

1071. Дана функция

$$y = \begin{cases} x^{-1}, \text{ если } x < -\dfrac{1}{2}, \\ 4x, \text{ если } -\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ x^{-1}, \text{ если } x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Сколько корней имеет уравнение:

а) $y = 2$; б) $y = \dfrac{1}{3}$; в) $y = 0$; г) $y = -3$?

Дополнительные упражнения к главе V

К параграфу 12

1072. Вычислите:

а) $-0{,}25^{-2} \cdot 100$; в) $0{,}2^{-4} \cdot (-1{,}6)$; д) $3\dfrac{1}{3} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} - 0{,}5$;

б) $0{,}01 \cdot (-0{,}5)^{-3}$; г) $0{,}1^{-1} + 1{,}1^{0}$; е) $-4^{-1} \cdot 5 + 2{,}5^{2}$.

1073. Преобразуйте выражение так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательными показателями:

а) $\dfrac{am^{-2}}{a^{-1}b}$; б) $\dfrac{(a+b)b}{b^{-1}(a-b)}$; в) $\dfrac{2a^{-1}b^{2}}{(a+b)^{-2}}$.

1074. Представьте в виде дроби выражение:

а) $xy^{-2} - x^{-2}y$; в) $mn(n-m)^{-2} - n(m-n)^{-1}$;

б) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}$; г) $(x^{-1} + y^{-1})(x^{-1} - y^{-1})$.

1075. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{2}}$; б) $\dfrac{ab^{-1} - a^{-1}b}{a^{-1} - b^{-1}}$.

1076. Представьте выражение в виде степени с основанием 10 (n — целое число):

а) 100^{n}; б) $0{,}1 \cdot 100^{n+3}$; в) $0{,}01^{n} \cdot 10^{2-2n}$.

1077. Упростите выражение (n — целое число):

а) $\dfrac{25^{n}}{5^{2n-1}}$; б) $\dfrac{6^{n}}{2^{n-1} \cdot 3^{n+1}}$.

1078. Докажите, что значение выражения (m — целое число) не зависит от m:

а) $\dfrac{21^m}{3^{m-1}\cdot 7^{m+1}}$; б) $\dfrac{6^m\cdot 10^{m+1}}{2^{2m}\cdot 15^{m-1}}$.

1079. Представьте выражение $x^{-2}+x^{-1}+x$ в виде произведения двух множителей, один из которых равен:

а) x; б) x^{-1}; в) x^{-2}.

1080. В выражении $a^{-6}+a^{-4}$ вынесите за скобки множитель:

а) a^{-4}; б) a^{-6}.

.081. Упростите выражение:

а) $\dfrac{x^5+x^{12}}{x^{-5}+x^{-12}}$; б) $\dfrac{a^5+a^6+a^7}{a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}}$.

082. Докажите, что при любом целом n верно равенство:

а) $2^n+2^n=2^{n+1}$; б) $2\cdot 3^n+3^n=3^{n+1}$.

083. Сократите дробь (n — целое число):

а) $\dfrac{3^{n+1}-3^n}{2}$; б) $\dfrac{2^n+2^{-n}}{4^n+1}$.

)84. Докажите, что выражение принимает одно и то же значение при любых целых значениях переменных:

а) $\dfrac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$; в) $\dfrac{5^m 4^n}{5^{m-2}2^{2n}+5^m 2^{2n-1}}$;

б) $\dfrac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; г) $\dfrac{21^n}{3^{n-1}7^{n+1}+3^n 7^n}$.

85. Корни x_1 и x_2 уравнения $nx^2-5x+1=0$ связаны соотношением $x_1^{-2}+x_2^{-2}=13$. Найдите n.

86. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:

а) 1 ч; б) 1 сутки; в) 1 год; г) 1 век.

87. Выполните действия над числами, записанными в стандартном виде:

а) $(3{,}4\cdot 10^{15})\cdot(7\cdot 10^{-12})$; в) $(9{,}6\cdot 10^{-12}):(3{,}2\cdot 10^{-15})$;

б) $(8{,}1\cdot 10^{-23})\cdot(2\cdot 10^{21})$; г) $(4{,}08\cdot 10^{11}):(5{,}1\cdot 10^{-7})$.

38. Расстояние от Земли до звезды α Центавра равно $2{,}07\cdot 10^5$ астрономическим единицам (астрономической единицей называется расстояние от Земли до Солнца, которое равно $1{,}495\cdot 10^8$ км). Выразите это расстояние в километрах.

1089. В 1 ккал содержится $4,2 \cdot 10^3$ Дж. Сколько килокалорий в 1 Дж?

1090. В таблице даны обозначения кратных и дольных приставок и соответствующие им множители.

Приставка	Кратность	Обозначение	Приставка	Кратность	Обозначение
мега	10^6	М	деци	10^{-1}	д
кило	10^3	к	санти	10^{-2}	с
гекто	10^2	г	милли	10^{-3}	м
дека	10^1	да	микро	10^{-6}	мк

Используя таблицу, выразите:
а) $2,5 \cdot 10^2$ Мт в тоннах;
б) $3,1 \cdot 10^{10}$ мг в килограммах;
в) $1,5 \cdot 10^{-2}$ гл в литрах;
г) $7 \cdot 10^{-7}$ м в микрометрах;
д) $8,4 \cdot 10^{-4}$ ккал в калориях.

1091. Масса Земли $6,0 \cdot 10^{21}$ т, а масса Луны $7,35 \cdot 10^{19}$ т. На сколько тонн масса Земли больше массы Луны?

К параграфу 13

1092. Работники телевидения решили провести опрос зрителей, чтобы выяснить, каким телевизионным передачам в вечерние часы они отдают предпочтение. Какие категории зрителей должны быть включены, на ваш взгляд, в составляемую выборку?

1093. В таблице частот, характеризующей распределение членов артели по числу изготовленных изделий, одно число оказалось стертым.

Число изделий	Частота
12	1
13	3
14	—
15	6
16	2

Восстановите его, зная, что в среднем члены артели изготовили по 14,2 изделия.

1094. Проведя учет бракованных деталей в контрольной партии ящиков, составили таблицу, в которой два числа оказались стертыми.

Число бракованных деталей	Число ящиков
0	12
1	28
2	—
3	—
4	7
5	2

Восстановите их, зная, что ящиков с двумя бракованными деталями оказалось вдвое больше, чем ящиков с тремя бракованными деталями, а в среднем в каждом ящике было по 1,85 бракованных деталей.
Для рассматриваемого ряда данных укажите моду.
Чему равен размах этого ряда данных?

1095. Проведя подсчет числа орфографических ошибок, допущенных учащимися, составили таблицу частот, в которой три числа оказались стертыми.

Число ошибок	Частота
0	4
1	—
2	—
3	—
4	7
5	4

Восстановите их, зная, что среднее из этих чисел на 4 больше предыдущего и на 3 меньше последующего, а в среднем учащиеся допустили по 2,5 ошибки.
Для рассматриваемого ряда данных укажите моду.
Чему равен размах этого ряда данных?

.096. По данным таблицы распределения призывников по росту, представленной в упражнении 1053, составьте новую таблицу с интервалом в 10 см.

1097. Имеются следующие данные о годовых удоях молока на молочной ферме:

Годовой удой молока, л	Число коров
до 1000	2
1000—2000	8
2000—3000	23
3000—4000	13
4000—5000	2

Заменив каждый интервал его серединой, найдите средний годовой удой молока от одной коровы на этой ферме.

1098. В ходе статистического исследования были опрошены 80 учащихся, которых попросили указать время (в минутах), затраченное на дорогу от дома до школы. По результатам исследования были составлены два интервальных ряда: один с интервалом длиной 5 мин, другой с интервалом длиной 10 мин. Для каждого интервального ряда построили гистограмму. Чем различаются эти гистограммы и что у них общего?

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

1099. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^4 + a^2x^2 + a^4}{x^3 + a^3}$; б) $\dfrac{8a^{n+2} + a^{n-1}}{16a^{n+4} + 4a^{n+2} + a^n}$.

1100. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 5, \\ y + z + u + v = 1, \\ z + u + v + x = 2, \\ u + v + x + y = 0, \\ v + x + y + z = 4. \end{cases}$$

1101. Докажите, что уравнение $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ не имеет отрицательных корней.

1102. Найдите обыкновенную дробь со знаменателем 21, заключенную между дробями $\dfrac{5}{14}$ и $\dfrac{5}{12}$.

1103. Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35} + 28^{21}$?

1104. Решите уравнение $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.

1105. Найдите корни уравнения $x^2 - 2x - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 13 = 0$.

1106. Найдите все двузначные числа $\overline{ab}$, где $b > a$, при которых значение дроби $\dfrac{\overline{ab}}{a + b}$ равно целому числу.

1107. Найдите три различные обыкновенные дроби вида $\dfrac{x}{x + 1}$, сумма которых равна натуральному числу.

1108. Найдите целые значения x, при которых функция

$$y = \sqrt{20 + 2\sqrt{91 + 6x - x^2}} - \sqrt{20 - 2\sqrt{91 + 6x - x^2}}$$

принимает целые значения.

1109. Найдите все целые значения функции

$$y = \sqrt{12 + 2\sqrt{35 + 2x - x^2}} - \sqrt{12 - 2\sqrt{35 + 2x - x^2}},$$

которые она принимает при целых x.

1110. Представьте многочлен $x^8 + x^4 + 1$ в виде произведения четырех многочленов ненулевой степени.

1111. Упростите выражение $\dfrac{\left(p^2 - \dfrac{1}{q^2}\right)^p \left(p - \dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2 - \dfrac{1}{p^2}\right)^q \left(q + \dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$. Укажите допустимые значения переменных.

1112. Функция y от x задана формулой $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $ad - bc \neq 0$.

Пусть значениям аргумента x_1, x_2, x_3 и x_4 соответствуют значения функции y_1, y_2, y_3 и y_4. Докажите, что

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

1113. Найдите все пары натуральных чисел, удовлетворяющие уравнению $x^2 - y^2 = 69$.

1114. Докажите, что сумма, разность, произведение и частное чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b — рациональные числа, могут быть представлены в таком же виде.

1115. Пара чисел $x = 3$, $y = 2$ является решением уравнения $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$. Покажите, что существует бесконечно много других пар натуральных чисел, удовлетворяющих этому уравнению.

1116. При каком значении m сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + m = 0$ равна 13?

1117. Решите уравнение $(x^2 - a^2)^2 = 4ax + 1$ относительно x.

1118. Найдите наименьшее значение выражения

$$(a - 1)(a - 2)(a - 5)(a - 6) + 9.$$

1119. Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px + 1 = 0$ равна 254. Найдите коэффициент p.

1120. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a - 1)x - 2a = 0$ равна 9?

1121. Докажите, что при любом натуральном n, большем 2, корни уравнения $x + \frac{1}{x} = n$ — иррациональные числа.

1122. Докажите, что функция $y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2}$, где $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, линейная.

1123. Из города M в город N вышел автобус со скоростью 40 км/ч. Через четверть часа он встретил ехавшую из города N легковую автомашину. Эта машина доехала до города M, через 15 мин выехала обратно в город N и обогнала автобус в 20 км от города N. Найдите расстояние между городами M и N, если скорость легковой автомашины 50 км/ч.

1124. Два мальчика стартовали по беговой дорожке длиной 50 м с интервалом 1 с. Мальчик, стартовавший вторым, догнал первого в 10 м от линии старта, добежал до конца дорожки и побежал обратно с той же скоростью. На каком расстоянии от конца дорожки он встретил первого мальчика, если известно, что эта встреча произошла через 10 с после старта первого мальчика?

1125. Расстояние между пристанями A и B теплоход проходит по течению за 5 ч, а против течения за 6 ч. За сколько часов проплывает по течению это расстояние плот?

1126. Катер прошел по течению 90 км за некоторое время. За то же время он прошел бы против течения 70 км. Какое расстояние за это время проплывет плот?

1127. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста и встретились в 30 км от пункта B. Прибыв в пункты A и B, они повернули обратно. Вторая встреча произошла в 18 км от пункта A. Найдите расстояние между пунктами A и B.

1128. Из A в B и из B в A выехали одновременно два мотоциклиста. Первый прибыл в B через 2,5 ч после встречи, а второй прибыл в A через 1,6 ч после встречи. Сколько часов был в пути каждый мотоциклист?

1129. Из A в B и из B в A выехали одновременно два автомобиля и встретились через 3 ч. Первый автомобиль пришел в B на 1,1 ч позже, чем второй в A. Во сколько раз скорость второго автомобиля больше скорости первого?

1130. Заготовленную в карьере руду первый самосвал может вывезти на 3 ч быстрее, чем второй. Если треть руды вывезет первый самосвал, а потом оставшуюся часть вывезет второй, то будет затрачено на $7\frac{1}{3}$ ч больше, чем при одновременной работе обоих самосвалов. За сколько часов может вывезти руду каждый самосвал?

1131. Два слесаря получили задание. Для его выполнения первому слесарю понадобится на 7 ч больше, чем второму. После того как оба слесаря выполнили половину задания, работу пришлось заканчивать одному второму слесарю, и поэтому задание было выполнено на 4,5 ч позднее, чем если бы всю работу они выполнили вместе. За сколько часов мог бы выполнить задание каждый слесарь?

1132. Дано двузначное число. Число его единиц на 3 меньше числа десятков. Произведение этого числа на число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, равно 574. Найдите данное число.

1133. Найдите члены пропорции $x_1 : x_2 = x_3 : x_4$, в которой первый член на 6 больше второго, а третий на 5 больше четвертого. Сумма квадратов всех членов равна 793.

1134. Из города по двум взаимно перпендикулярным дорогам вышли в разное время два пешехода. Скорость первого пешехода 4 км/ч, а второго 5 км/ч. Сейчас первый находится в 7 км от города, а второй — в 10 км. Через сколько часов расстояние между пешеходами будет равно 25 км?

1135. Докажите, что если $a + c = 2b$ и $2bd = c(b + d)$, причем $b \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

1136. Постройте график функции, заданной формулой $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}$.

1137. Постройте график функции, заданной формулой:
а) $y = |x + 2| + |x - 2|$; б) $y = |x + 1| - |x - 1|$.

1138. Постройте график функции, заданной формулой $y = x + \frac{1}{x}$.

1139. Пересекает ли график функции $y = \frac{3x + 1}{x}$ прямую:
а) $x = 0$; б) $y = 0$; в) $x = 3$; г) $y = 3$?

1140. Постройте график функции:
а) $y = \frac{2x + 3}{x}$; в) $y = \frac{12}{x - 4}$;
б) $y = \frac{4 - 5x}{x}$; г) $y = -\frac{6}{x + 3}$.

1141. Докажите, что графиком уравнения $xy - 2x + 3y - 6 = 0$ является пара пересекающихся прямых.

1142. Докажите, что графиком уравнения $(y - 2)(y + 3) = 0$ является пара параллельных прямых.

1143. Постройте график уравнения:

а) $xy + 3x = 0$;
б) $(x - y)(y - 5) = 0$;
в) $(xy - 6)(y - 3) = 0$;
г) $(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$;
д) $x^2 - 4 = 0$;
е) $y^2 - 9 = 0$.

1144. Докажите, что если числа a, b и c таковы, что $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$, $c + a \neq 0$, то при

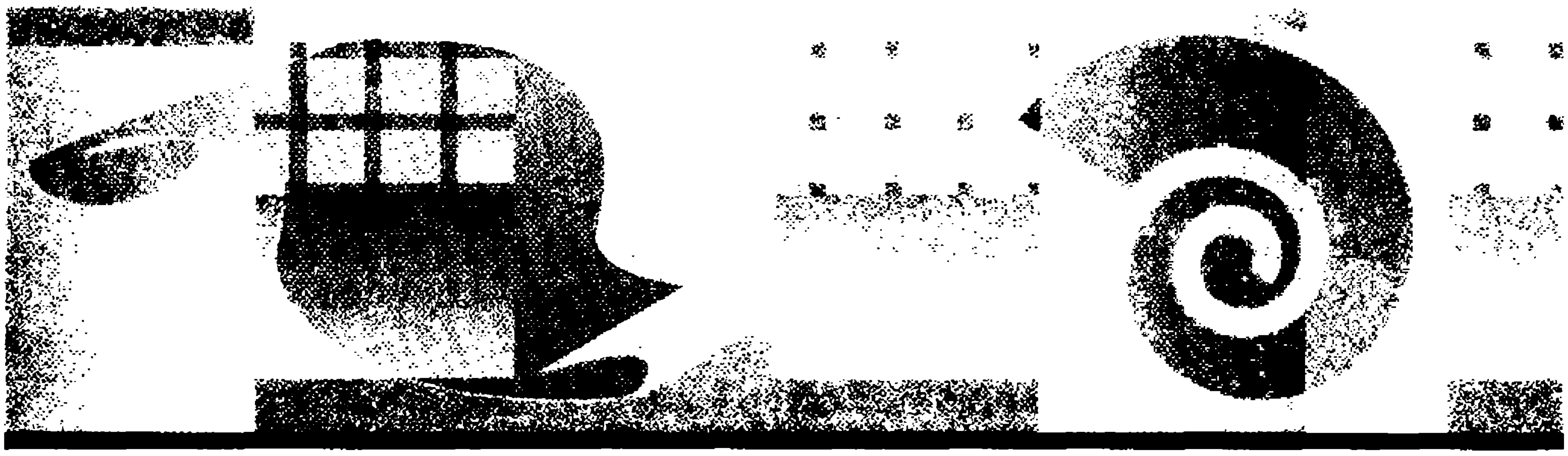
$$x = \frac{a - b}{a + b}, \quad y = \frac{b - c}{b + c}, \quad z = \frac{c - a}{c + a}$$

верно равенство $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$.

1145. На плоскости отмечено несколько точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две точки проведена прямая. Сколько точек отмечено на плоскости, если известно, что всего проведено 45 прямых?

1146. Докажите тождество

$$\sqrt{\frac{a^2 + 6ab + 25b^2}{a - 2\sqrt{ab} + 5b} - 4b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$



ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

О дробях

Простейшими дробями пользовались еще в древности (2 тыс. лет до н. э.). Так, древние вавилоняне имели специальные обозначения для дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. В Древнем Египте пользовались *единичными* дробями, т. е. дробями вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Если в результате измерения получалось число $\frac{7}{8}$, то его записывали в виде суммы единичных дробей: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Такой способ представления дробей был удобен в практическом отношении. Например, при решении задачи «Разделить 7 хлебов поровну между восемью лицами» этот способ подсказывал, что нужно иметь 8 половинок, 8 четвертинок и 8 осьмушек, т. е. 4 хлеба нужно разрезать пополам, 2 хлеба — на четвертушки и один хлеб — на осьмушки и распределить доли между лицами.

Одновременно с единичными дробями появились и *систематические* дроби, т. е. дроби, у которых числителями могут быть любые числа, а знаменателями — степени определенного числа (например, десяти, двенадцати, шестидесяти). Шестидесятеричные дроби использовались вплоть до XVII в. До сих пор единицы времени выражаются в шестидесятеричной системе: 1 минута $= \frac{1}{60}$ часа, 1 секунда $= \frac{1}{60^2}$ часа. Систематическими дробями являются и десятичные дроби.

Дроби общего вида, у которых числители и знаменатели могут быть любыми натуральными числами, появляются в некоторых сочинениях древнегреческого ученого Архимеда (287—212 гг. до н. э.). Древние греки практически умели производить все действия над обыкновенными дробями. Однако современной записи дробей с помощью черты не было. Такая запись дроби была введена лишь в 1202 г. итальянским математиком Л. Фибоначчи (1180—1240) в его произведении «Книга абака». До этого дроби выражали словесно, применяли особую запись, в которой около числа, обозначающего знаменатель дроби, справа ставился штрих, использовались и другие способы записи. Долгое время дроби не называли числами. Иногда их называли «ломаными числами». Только в XVIII в. дроби стали воспринимать как числа. Этому способствовал выход в 1707 г. книги английского ученого И. Ньютона (1643—1727) «Всеобщая арифметика», в которой дроби не только признаются равноправными числами, но и происходит расширение понятия дроби как частного от деления одного выражения на другое. В этой книге, в частности, говорится: «Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2... $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8... $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b... $\frac{ab-bb}{a+x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab-bb$ на $a+x$, и т. д. Величины такого рода называются дробями».

О действительных числах

Понятие числа зародилось в глубокой древности. На протяжении веков это понятие подвергалось расширению и обобщению. Необходимость выполнять измерения привела к положительным рациональным числам. Решение уравнений привело к появлению отрицательных чисел. Однако долгое время их считали «фиктивными» и истолковывали как «долг», как «недостачу». Правила действий над положительными и отрицательными числами длительное время рассматривались лишь для случаев сложения и вычитания. Например, индийские математики VII в. так формулировали эти правила: «Сумма двух имуществ есть имущество, сумма двух долгов есть долг, сумма имущества и долга равна их разности». Лишь в XVII в. с использованием метода координат, введенного Декартом и Ферма, отрицательные числа были признаны в качестве равноправных с положительными.

Целые и дробные числа являются рациональными числами. Эти числа удобны для вычислений: сумма, разность, произведение и частное (при условии, что делитель отличен от нуля) двух рациональных чисел являются рациональным числом. Рациональные числа обладают свойством плотности, поэтому всякий отрезок можно с любой степенью точности измерить отрезком, принятым за единицу, и его долями и выразить результат измерения рациональным числом. Поэтому рациональные числа долгое время вполне обеспечивали (и обеспечивают до сих пор) практические потребности людей. Тем не менее задача измерения величин привела к появлению новых, иррациональных чисел. Еще в Древней Греции в школе Пифагора (VI в. до н. э.) было доказано, что нельзя выразить рациональным числом диагональ квадрата, если за единицу измерения принять его сторону. Такие отрезки, как диагональ квадрата и его сторона, назвали несоизмеримыми. В дальнейшем (V—IV вв. до н. э.) древнегреческими математиками была доказана иррациональность $\sqrt{n}$ для любого натурального n, не являющегося точным квадратом.

Математики Индии, Ближнего и Среднего Востока, а позднее и Европы пользовались иррациональными величинами. Однако долгое время не признавали их за равноправные числа. Их признанию способствовало появление «Геометрии» Декарта. На координатной прямой каждое рациональное или иррациональное число изображается точкой, и, наоборот, каждой точке координатной прямой соответствует некоторое рациональное или иррациональное, т. е. действительное, число. С введением иррациональных чисел все «просветы» на координатной прямой оказались заполненными. Имея в виду это свойство, говорят, что множество действительных чисел (в отличие от множества рациональных чисел) является непрерывным.

Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби (периодической или непериодической). В XVIII в. Л. Эйлер (1707—1783) и И. Ламберт (1728—1777) показали, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь является рациональным числом. Непериодическая бесконечная десятичная дробь представляет иррациональное число. Построение действительных чисел на основе бесконечных десятичных дробей было дано немецким математиком К. Вейерштрассом (1815—1897). Другие подходы к изложению теории действительного числа были предложены немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831—1916) и Г. Кантором (1845—1918).

О квадратных корнях

С давних пор наряду с отысканием площади квадрата по известной длине его стороны приходилось решать и обратную задачу: «Какой должна быть сторона квадрата, чтобы его площадь равнялась a?» Такую задачу умели решать еще 4 тыс. лет назад вавилонские ученые. Они составляли таблицы квадратов чисел и квадратных корней из чисел.

Вавилоняне использовали метод приближенного извлечения квадратного корня, который состоял в следующем. Пусть a — некоторое число (имеется в виду натуральное число), не являющееся полным квадратом. Представим a в виде суммы $b^2 + c$, где c достаточно мало́ по сравнению с b^2. Тогда

$$\sqrt{a} = \sqrt{b^2 + c} \approx b + \frac{c}{2b}.$$

Например, если $a = 112$, то $\sqrt{112} = \sqrt{10^2 + 12} \approx 10 + \frac{12}{20} = 10{,}6$. Проверка показывает, что $10{,}6^2 = 112{,}36$.

Указанный метод извлечения квадратного корня подробно описан древнегреческим ученым Героном Александрийским (I в. н. э.).

В эпоху Возрождения европейские математики обозначали корень латинским словом *Radix* (корень), а затем сокращенно буквой *R* (отсюда произошел термин «радикал», которым принято называть знак корня). Некоторые немецкие математики XV в. для обозначения квадратного корня пользовались точкой. Эту точку ставили перед числом, из которого нужно извлечь корень. Позднее вместо точки стали ставить ромбик ♦, впоследствии знак $\vee$ и над выражением, из которого извлекается корень, проводили черту. Затем знак $\vee$ и черту стали соединять. Такие записи встречаются в «Геометрии» Декарта и «Всеобщей арифметике» Ньютона. Современная запись корня появилась в книге «Руководство алгебры» французского математика М. Ролля (1652—1719).

О квадратных уравнениях

Неполные квадратные уравнения и частные виды полных квадратных уравнений ($x^2 \pm x = a$) умели решать вавилоняне (около 2 тыс. лет до н. э.). Об этом свидетельствуют найденные клинописные тексты задач с решениями (в виде рецептов). Некоторые виды квадратных уравнений могли решать древнегреческие математики, сводя их решение к геометрическим построениям. Приемы решения уравнений без обращения к геометрии дает Диофант Александрийский (III в.). В дошедших до нас 6 из 13 книг «Арифметика» содержатся задачи с решениями, в которых Диофант объясняет, как надо выбрать неизвестное, чтобы получить решение уравнения вида $ax = b$ или $ax^2 = b$. Способ решения полных квадратных уравнений Диофант изложил в книгах «Арифметика», которые не сохранились.

Правило решения квадратных уравнений, приведенных к виду $ax^2 + bx = c$, где $a > 0$, дал индийский ученый Брахмагупта (VII в.). В трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» хорезмский математик аль-Хорезми разъясняет приемы решения уравнений вида $ax^2 = bx$,

$ax^2 = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 + bx = c$, $bx + c = ax^2$ (буквами a, b и c обозначены лишь положительные числа, так как отрицательных чисел тогда не признавали) и отыскивает только положительные корни.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к виду $x^2 + bx = c$, было сформулировано немецким математиком М. Штифелем (1487—1567). Выводом формулы решения квадратных уравнений общего вида занимался Виет. Однако свое утверждение он высказывал лишь для положительных корней (отрицательных чисел он не признавал). После трудов нидерландского математика А. Жирара (1595—1632), а также Декарта и Ньютона способ решения квадратных уравнений принял современный вид.

Формулы, выражающие зависимость корней уравнения от его коэффициентов, были выведены Виетом в 1591 г. Для квадратного уравнения теорема Виета в современных обозначениях выглядела так: корнями уравнения $(a + b)x - x^2 = ab$ являются числа a и b.

О неравенствах

Понятия «больше» и «меньше» наряду с понятием равенства возникли в связи со счетом предметов и необходимостью сравнивать различные величины. Понятиями неравенства пользовались уже древние греки. Архимед, занимаясь вычислением длины окружности, установил, что «периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых». Иначе говоря, Архимед указал границы числа π:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ряд неравенств приводит в своем знаменитом трактате «Начала» Евклид. Он, например, доказывает, что среднее геометрическое двух положительных чисел не больше их среднего арифметического, т. е. что верно неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. В «Математическом собрании» Паппа Александрийского (III в.) доказывается, что если $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (a, b, c и d — положительные числа), то $ad > bc$.

Однако все эти рассуждения проводили словесно, опираясь в большинстве случаев на геометрическую терминологию. Современные знаки неравенств появились лишь в XVII—XVIII вв. Знаки $<$ и $>$ ввел английский математик Т. Гарриот (1560—1621), знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — французский математик П. Буге (1698—1758).

СВЕДЕНИЯ ИЗ КУРСА АЛГЕБРЫ 7 КЛАССА

Выражения и их преобразования

1. Степенью числа a с натуральным показателем n, бо́льшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Степенью числа a с показателем 1 называют само число a:

$$a^1 = a.$$

Степень числа $a \neq 0$ с показателем 0 равна 1:

$$a^0 = 1.$$

2. Свойства степеней с натуральными показателями:

а) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели складывают.

б) $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$, $m \geqslant n$.

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

в) $(a^m)^n = a^{mn}$.

При возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

г) $(ab)^n = a^n b^n$.

При возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

3. Одночленами называют произведения чисел, переменных и их степеней, а также сами числа, переменные и их степени. Например, $5a^2x$, $-3a^2b^3$, 4, x, y^5 — одночлены.

Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен. Например, степень одночлена $-8a^2b^4$ равна 6.

4. Многочленом называют сумму одночленов. Например, $3x^5 - 4x^2 + 1$, $7a^3b - ab^2 + ab + 6$ — многочлены. Одночлены считают многочленами, состоящими из одного члена.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней входящих в него одночленов. Например, степень многочлена $5x^3y + 3x^2y^5 + xy$ равна степени одночлена $3x^2y^5$, т. е. равна 7.

Степенью произвольного многочлена называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

5. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «плюс», то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например,

$$(3ab + 5c^2) + (ab - c^2) = 3ab + 5c^2 + ab - c^2 = 4ab + 4c^2.$$

При вычитании многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «минус», то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого, заключенного в скобки. Например,

$$(6x^2 - y) - (2x^2 - 8y) = 6x^2 - y - 2x^2 + 8y = 4x^2 + 7y.$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$a^2(3ab - b^3 + 1) = 3a^3b - a^2b^3 + a^2.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить. Например,

$$(5x - 1)(3x + 2) = 15x^2 - 3x + 10x - 2 = 15x^2 + 7x - 2.$$

6. Формулы сокращенного умножения:

а) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

б) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений, плюс квадрат второго выражения.

в) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго плюс куб второго выражения.

г) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.

д) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений.

е) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

Сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

ж) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы.

7. Разложением многочлена на множители называют представление многочлена в виде произведения многочленов.

Для разложения многочленов на множители применяют вынесение общего множителя за скобки, группировку, формулы сокращенного умножения. Например, многочлен $5x^3 - x^2y$ можно разложить на множители, вынеся за скобки x^2: $5x^3 - x^2y = x^2(5x - y)$. Многочлен $3x - 3y - ax + ay$ можно разложить на множители, используя способ группировки:

$$3x - 3y - ax + ay = (3x - 3y) - (ax - ay) =$$
$$= 3(x-y) - a(x-y) = (x-y)(3-a).$$

Многочлен $a^4 - 25x^2$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов двух выражений:

$$a^4 - 25x^2 = (a^2)^2 - (5x)^2 = (a^2 - 5x)(a^2 + 5x).$$

Иногда многочлен удается разложить на множители, применив последовательно несколько способов.

Уравнения

8. Корнем уравнения с одной переменной называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Например, число 8 — корень уравнения $3x + 1 = 5x - 15$, так как верно равенство $3 \cdot 8 + 1 = 5 \cdot 8 - 15$.

Решить уравнение с одной переменной — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

9. Уравнения с одной переменной, имеющие одни и те же корни, называют равносильными. Например, уравнения $x^2 = 25$ и $(x + 5)(x - 5) = 0$ равносильны. Каждое из них имеет два корня: -5 и 5. Уравнения, не имеющие корней, также считают равносильными.

При решении уравнений с одной переменной используются следующие свойства:

если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

10. Линейным уравнением с одной переменной называют уравнение вида $ax = b$, где x — переменная, a и b — числа.

Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $\frac{b}{a}$. Например, уравнение $7x = 2$ имеет корень $\frac{2}{7}$.

Если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ не имеет корней. Например, уравнение $0 \cdot x = 7$ не имеет корней.

Если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения $ax = b$ является любое число.

11. Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую это уравнение в верное равенство. Например, пара чисел $x = -1$, $y = 4$ — решение уравнения $5x + 3y = 7$.

Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

В уравнении с двумя переменными можно переносить слагаемые из одной части в другую, изменяя их знаки, и обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, не равное нулю. При этом получаются уравнения, равносильные исходному.

12. Линейным уравнением с двумя переменными называют уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — числа.

13. Графиком уравнения с двумя переменными называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Графиком линейного уравнения с двумя переменными, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, является прямая.

14. Решением системы уравнений с двумя переменными называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение системы в верное равенство. Например, пара чисел $x = 7$, $y = -1$ — решение системы $\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x - y = 15, \end{cases}$ так как является верным каждое из равенств $7 + (-1) = 6$ и $2 \cdot 7 - (-1) = 15$.

Решить систему уравнений — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет.

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют равносильными. Системы, не имеющие решений, также считают равносильными.

15. Для решения систем линейных уравнений с двумя переменными используются способ подстановки, способ сложения, графический способ.

Функции

16. Функциональная зависимость, или функция, — это такая зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.

Независимую переменную иначе называют аргументом, а о зависимой переменной говорят, что она является функцией этого аргумента. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Графиком функции называют множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции.

17. Линейной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — числа.

Графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая. Число k называют угловым коэффициентом прямой, являющейся графиком функции $y = kx + b$.

Если $k \neq 0$, то график функции $y = kx + b$ пересекает ось x; если $k = 0$ и $b \neq 0$, то прямая — график функции $y = kx + b$, параллельна оси x; если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции совпадает с осью x.

Графики двух линейных функций пересекаются, если их угловые коэффициенты различны, и параллельны, если их угловые коэффициенты одинаковы.

Линейную функцию, задаваемую формулой $y = kx$ при $k \neq 0$, называют прямой пропорциональностью.

График прямой пропорциональности есть прямая, проходящая через начало координат. При $k > 0$ график расположен в первой и третьей координатных четвертях, а при $k < 0$ — во второй и четвертой координатных четвертях.

18. График функции $y = x^2$ — парабола. Этот график проходит через начало координат и расположен в первой и второй координатных четвертях. Он симметричен относительно оси y.

График функции $y = x^3$ проходит через начало координат и расположен в первой и третьей координатных четвертях. Он симметричен относительно начала координат.

Статистические характеристики

Средним арифметическим ряда чисел называют частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Модой ряда чисел называют число, которое встречается в данном ряду чаще других.

Ряд чисел может иметь более одной моды или не иметь моды совсем.

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называют число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называют среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Например, медиана ряда чисел

$$17,\ 21,\ 27,\ 29,\ 32,\ 37,\ 41$$

равна 29, а медиана ряда чисел

$$28,\ 43,\ 54,\ 56,\ 58,\ 62$$

равна 55.

Медианой произвольного ряда чисел называют медиану соответствующего упорядоченного ряда.

Размахом ряда чисел называют разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОТВЕТЫ

Глава I

4. а) –10; б) 2,5. **8.** $t = \frac{s}{v_1 + v_2}$; а) 2,5 ч; б) 2 ч. **12.** д) Все числа, кроме 6 и –6; е) все числа, кроме 0 и –7. **18.** а) При $a = 0$; б) при $a = 3$. **19.** При $b = 0$; б) при $b = 2$. **25.** а) $\frac{2b}{a^2}$; б) $\frac{1}{2x^2y}$; в) $\frac{p^2q^2}{2}$; г) $2m$; д) $-\frac{8b}{3c}$; е) $\frac{1}{3}$. **27.** а) 1; б) 3. **29.** а) $\frac{a+4b}{2ab}$; б) $\frac{3b-4c}{2b}$; в) $\frac{2}{3}$; г) $\frac{5x}{6}$; д) $\frac{1}{a}$; е) $3x$. **30.** а) $\frac{y-4}{3}$; б) $\frac{5}{x+3y}$; в) $\frac{c+2}{7c}$; г) $\frac{6c}{d-3}$; д) $\frac{a+5}{a-5}$; е) $\frac{y+3}{y-3}$. **31.** а) $\frac{1}{a+b}$; б) a^2+ab+b^2. **32.** а) 100; б) 1,5. **33.** а) $\frac{x-2}{x}$; б) $\frac{3y}{y+8}$; в) $\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{1}{b^2-2b+4}$. **34.** а) $3x-y$; б) $\frac{a}{2b-1}$; в) $\frac{1}{x-2}$; г) $1-a+a^2$. **35.** а) $\frac{b+2}{7}$; б) $\frac{4}{b-d}$; в) $\frac{y-1}{x+y}$; г) $\frac{a+c}{a-x}$. **39.** а) –1; б) 1; в) $b-a$; г) $\frac{1}{a-b}$; д) $a+b$; е) 1. **40.** в) $-\frac{3}{b}$; г) $-\frac{1}{3}$; д) $-\frac{a+5}{3}$; е) $\frac{3}{1-x}$; ж) $\frac{8a+8b}{b-a}$; з) $b-2$. **41.** а) $\frac{a+b}{b}$; б) $\frac{2-b}{5}$. **42.** а) x^2; б) $-y^4$; в) $-b^5$; г) c^3+c^2. **43.** а) $-\frac{1}{8}$; б) 0,01. **44.** а) $4a-4b$; б) $9c+27d$; в) $\frac{9x+18y}{5}$; г) $\frac{2x-y}{50x+25y}$. **50.** а) –3,2; б) 0,1; в) 12; г) –0,5; д) 5. **56.** а) $\frac{27-13x}{x}$; б) $\frac{15p-2}{3p^2}$; в) $\frac{y-1}{y}$; г) $\frac{2p-11q}{5p}$; д) $-\frac{d}{c}$; е) $\frac{12}{b}$. **59.** а) 16,25; б) 6. **61.** а) $\frac{x-5}{y-1}$; б) $\frac{a+6}{c-3}$; в) 2; г) –5; д) $a-4$; е) $x-3y$. **62.** а) $\frac{7p}{p-q}$; б) 5; в) 1; г) –1; д) $\frac{1}{a+3}$; е) $y+1$. **64.** а) $\frac{x+5}{x-5}$; б) $\frac{1}{x-5}$. **65.** а) $\frac{x-4}{x+4}$; б) $\frac{8+a}{8-a}$. **68.** При $n = 1, 2, 3, 6$. **70.** а) 7; б) 3; в) 1; г) –20. **74.** б) $\frac{2}{15}$; г) $\frac{3y^2-4b^2}{120by}$. **75.** а) $\frac{41a+13b}{36a}$; б) $\frac{9x+16}{24y}$. **76.** д) $\frac{4a^2-3ab-3b^2}{a^2b^2}$; е) $\frac{x^2-xy-2y^2}{x^2y^2}$. **77.** а) $\frac{2x^2-3}{12x^3}$; б) $\frac{2b-1}{6ab^2}$; в) $\frac{5a^2-6}{15a^5}$; г) $\frac{b^2x-2b}{6x^6}$. **78.** в) 0; г) $\frac{a}{b}$.

79. а) $\frac{z-y}{yz}$; б) $\frac{a^2-b^2}{3ab}$; в) $-\frac{p^2+q^2}{p^3q^3}$; г) $\frac{3m^2-2n^2}{6m^2n^2}$. **80.** д) $\frac{b}{a}$; е) $-\frac{1}{2p}$; ж) $\frac{a^2+b^2}{2a}$; з) $-\frac{b^2+c^2}{2b}$. **81.** в) $\frac{2a+3b+3}{3}$; г) $\frac{b^2+5b-1}{b}$. **82.** в) $\frac{a-6}{6}$; г) $\frac{41a-5}{12}$; д) $\frac{5b-3a}{4}$; е) $\frac{ab-b^2}{a}$. **83.** а) $\frac{3x+3y}{4}$; б) $-\frac{2x+2}{x}$; в) $\frac{36-5x+7y}{12}$; г) $-\frac{17a+17b+30}{15}$. **84.** д) $-\frac{4a}{a^2-4}$; е) $\frac{2p}{9p^2-1}$. **86.** а) $\frac{px-3p}{6x^2-x-2}$; б) $\frac{8ax+2ay}{x^2-xy-2y^2}$; в) $\frac{11a}{30x-60}$; г) $\frac{23b}{48a-144}$. **88.** а) $\frac{a+x}{x}$; б) $\frac{2y-b}{y}$. **89.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $-\frac{1}{ab}$. **90.** д) $\frac{x^2-6x}{x-3}$; е) $-\frac{2}{a^2-1}$. **91.** а) $\frac{8a}{(a-5)(b+8)}$; б) $\frac{2y^2}{(2y+3)(3x-2)}$. **92.** а) $\frac{b-c}{b+c}$; б) $\frac{a+1}{a^2-a}$. **93.** а) $\frac{2-b}{b^2+2b}$; б) $\frac{b-5a}{ab+5a^2}$; в) $\frac{x-4a}{x^2+4ax}$; г) $\frac{a-10y}{a^2+10ay}$. **94.** а) $\frac{6a+8}{a^3-4a}$; б) $\frac{3x}{x^2-16}$; в) 2; г) 0. **95.** а) $-\frac{8}{15}$; б) $-\frac{8}{27}$. **96.** а) $\frac{1}{y+2}$; б) $\frac{3}{a-6}$; в) $\frac{x^2+y^2}{2(x-y)^2}$; г) $\frac{a^2}{b(b-a)^2}$. **97.** а) $-\frac{8}{2a+b}$; б) $\frac{36}{(a-3)^2(a+3)^2}$; в) $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$; г) $\frac{1}{a-1}$. **98.** а) $\frac{2}{a-4b}$; б) $\frac{1}{b}$. **103.** $t=\frac{2sv}{v^2-25}$; а) 4 ч 10 мин; б) 5 ч 20 мин. **104.** $t=\frac{3sv-2s}{v(v-2)}$; 6 ч 40 мин. **111.** в) $\frac{8a^2}{m}$; г) $\frac{4b}{a}$. **112.** в) $-\frac{4}{15xy}$; г) $-\frac{10a^2x}{9by^2}$. **113.** в) $\frac{13mx}{3n}$; г) $\frac{11x^2}{3ab}$. **114.** а) $\frac{a^2x^2}{5b^3}$; б) $\frac{m^2}{p^4}$. **115.** в) $\frac{n^6}{1000m^3}$; г) $\frac{81a^6}{4b^4}$. **116.** в) $\frac{4a^4b^2}{9m^2n^6}$; г) $-\frac{27x^6}{8y^9}$. **117.** в) $-\frac{1000m^6}{n^6p^3}$; г) $\frac{b^6c^4}{64a^6}$. **118.** 14. **120.** в) $\frac{y^2-2y}{3y+6}$; г) $\frac{2a^2b+6ab^2}{a-3b}$. **121.** а) $\frac{1}{axy}$; б) $\frac{4}{x^2}$. **122.** а) $\frac{y-4}{6x}$; б) $-\frac{3b}{a+b}$. **123.** в) $\frac{x^2+5x+6}{6}$; г) $\frac{y^2-11y+30}{4}$. **124.** а) 1; б) $-1\frac{1}{9}$; $-\frac{2}{21}$. **125.** а) $\frac{2a-2b}{a^2+ab}$; б) $\frac{bx-5b}{ax+5a}$. **129.** $\frac{a-4b}{a-b}$. **130.** а) 3 ч; б) 2 ч 31 мин. **131.** а) $x=\frac{a-b}{3}$; б) $x=\frac{2b-a}{7}$; в) $x=ab-a$; г) $x=10b-10a$. **134.** в) $\frac{2x}{3my^3}$; г) $\frac{450x^3}{ab}$. **136.** а) $\frac{5m^8}{3n^8}$; б) $\frac{2y}{x^2}$. **137.** в) $\frac{ax^2}{44}$; г) $\frac{9}{4m}$; д) $\frac{a}{21b}$; е) $\frac{x^2+2xy}{5}$; ж) $\frac{6a-3b}{2a^2+ab}$; з) $\frac{10m}{2m-3n}$. **138.** а) $\frac{1}{x-3y}$; б) $\frac{a-3b}{a+3b}$. **139.** г) $-\frac{9p+3}{q}$. **140.** а) $\frac{10}{11}$; -1; б) 0,42. **142.** а) $\frac{x+1}{a-x}$; б) $\frac{2ap-6a}{p^2+2p+4}$. **143.** а) $c=\frac{ab}{a+b}$; б) $b=\frac{ac}{a-c}$. **144.** а) $\frac{2}{2b-3}$; б) $\frac{c-b}{ac-3a^2}$. **145.** 2 км/ч. **148.** а) $\frac{x-y}{y}$; б) $\frac{a^3}{m^4}$; в) $\frac{(a+b)^2}{b^2}$;

г) 0. **149.** а) $\frac{2x+1}{2x-1}$; б) $-\frac{5y}{y+1}$; в) $-a$; г) x. **150.** а) $\frac{10}{2m+1}$; б) $\frac{2}{x-3}$. **151.** а) 6; б) 10. **152.** а) $\frac{16}{9-a^2}$; б) $\frac{6x-1}{4x^2-1}$; в) $-\frac{c}{a}$; г) $\frac{2a+2y}{ax-3a}$. **153.** а) $\frac{1+a}{1-a}$; б) $1{,}5x$; в) $\frac{a}{a+2}$; г) $y-5$. **154.** а) 1; б) a; в) x^2+1; г) $-m$. **155.** а) $2x^2+2xy$; б) $\frac{x-2y}{2xy}$. **156.** а) $\frac{3}{1-x}$; б) $\frac{a}{4a+8}$. **157.** При $a=1$; 36. **158.** При $b=0$; $\frac{1}{2}$. **163.** в) $\frac{2x^2+2y^2}{y^2}$; г) 4. **164.** а) $\frac{x-1}{x+1}$; б) 1; в) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$; г) $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. **165.** а) $\frac{2x-a}{2x+a}$; б) $\frac{a-b+3c}{a+b-c}$; в) $\frac{y+x}{y-x}$; г) $\frac{xy}{x+y}$. **166.** а) $\frac{a^2}{b^2}$; б) $\frac{a}{b}$. **167.** а) $\frac{1}{x}$; б) $a+b$. **168.** а) 3; б) -1. **170.** а) 3,75; б) $3\frac{3}{7}$; в) 9,6. **171.** 72 км/ч. **172.** 4,8 ч. **173.** ≈10,2 км/ч. **175.** а) $y=3x+4$; б) $y=-\frac{1}{2}x$. **177.** 12 см и 32 см. **178.** Через 4 ч. **190.** а) $y=\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{1{,}2}{x}$; в) $y=\frac{5}{x}$. **195.** $\frac{2}{x+7}$. **197.** $a=-6$, $b=12$. **200.** При a, равном -1, 1, 3, 5. **201.** а) -2; 2; б) -9; -8; 0; 1. **205.** $a=8$ и $b=56$; $a=14$ и $b=14$; $a=56$ и $b=8$. **206.** 30. **207.** $7\frac{21}{25}$. **209.** $v=\frac{60(10-t)}{t-3}$; 45 км/ч; 80 км/ч. **210.** д) Все числа, кроме -3 и 3; е) все числа. **214.** а) $\frac{a-c}{a+c}$; б) $\frac{(a+3)^2}{3-a}$; в) $-\frac{4y^2+2y+1}{2y^2+y}$; г) $\frac{25a}{5a+3b}$. **215.** а) $\frac{a-2}{a+b}$; б) $\frac{2x-y}{3x+2}$. **216.** а) $\frac{1}{b^7+1}$; б) $\frac{x^{11}-1}{x^{11}}$; в) $\frac{z}{xy-z^2}$; г) $1-ab$. **218.** а) $\frac{4}{9}$; б) $1\frac{1}{3}$; в) 45; г) $\frac{1}{9}$. **223.** а) При $n=1, 2, 3, 6$; б) при $n=3, 4, 6, 12$; в) при $n=1, 2, 3$. **224.** а) 6; б) 4; в) 0,2; г) 1,4. **225.** а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0,5. **229.** а) $\frac{4}{2y+1}$; б) $\frac{20}{15a+8}$. **231.** а) $\frac{2y+30}{y^2-9}$; б) $\frac{8}{3-2a}$; в) $\frac{2m+1}{12m-6}$; г) $\frac{4y^2}{(x^2-y^2)^2}$; д) $\frac{6a^2+3}{a^3-1}$; е) $\frac{2x-2y}{x^2+xy+y^2}$. **233.** а) $\frac{1}{abc}$; б) 1. **235.** а) При $a=-6$; б) при $a=5$; в) при $a=6$; г) при $a=7$. **237.** а) При $n=\pm1$, ±3; б) при $n=\pm1$, ±3; ±9; в) при $n=-8$, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4. **238.** а) $a=2$, $b=3$; б) $a=8$, $b=3$. **239.** а) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$; б) $\frac{(x-b)^2}{(x+b)^2}$. **243.** а) $\frac{ab}{a-b}$; б) $-xy$; в) $\frac{a}{(2a-b)^2}$; г) $\frac{(c+2)^2}{(c-2)^2}$. **244.** а) x^2-y^2; б) $-a$. **248.** а) $\frac{x-z}{y-z}$; б) $\frac{a^3+x^3}{a^3-x^3}$; в) $\frac{x+1}{2x+1}$; г) $x+1$. **250.** ≈68,6 км/ч. **251.** ≈9,4 ч.

267. в) 0,(142857); г) –2,(2); д) –0,5(3); и) –1,075(0). **272.** а) $\frac{4a}{a+b}$; б) $\frac{1}{(x+1)^2}$.
288. а) 3,2; б) 3,11; в) 3,115. **289.** а) 16,6; б) 16,56. **290.** 28,26 см.
291. 314 м^2. **294.** $\frac{a}{b}$. **304.** д) 10; е) 6,2. **305.** д) –0,01; е) 0,09; ж) –0,7; з) 3.
308. а) Точка A; б) точка B. **314.** а) При $x = 9{,}2$; б) при $x = 13{,}5$; в) при $x = 1{,}5$. **322.** г) –0,7 и 0,7; д) $-\sqrt{40}$ и $\sqrt{40}$; е) корней нет. **323.** а) Корней нет; б) –0,3 и 0,3; в) $-\sqrt{60}$ и $\sqrt{60}$; г) корней нет; д) 0, $-\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; е) 0, $-\sqrt{11}$ и $\sqrt{11}$. **324.** а) –2 и 8; б) –7 и –1; в) $6-\sqrt{7}$ и $6+\sqrt{7}$; г) $-2-\sqrt{6}$ и $-2+\sqrt{6}$. **330.** а) 1,29; б) 19; в) 42; г) –17. **331.** а) 9; б) 28; в) 18; г) 56. **332.** а) –12; б) –45; в) 0; г) 2. **334.** а) –3; б) 3. **337.** $\sqrt{6} = 2{,}44\ldots$. **341.** 4,2 см. **342.** а) $\sqrt{(a+b)c}$; б) $\sqrt{b}+a$. **344.** а) 10,12; б) 6,17; в) 7,04; г) 0,95; д) 4,08; е) 14,88. **348.** а) –5,48 и 5,48; б) –1,20 и 1,20; в) –0,46 и 6,46; г) –3,83 и 1,83. **349.** а) –0,3; б) 6,6; в) 6,6; г) 9. **351.** а) $\frac{5-2a}{5+2a}$; б) $\frac{2y-3x}{2y+3x}$. **366.** а) 8,2; б) 36; в) 12; г) –5.
372. а) 12; б) 0,0033; в) $1\frac{13}{27}$; г) $3\frac{1}{2}$. **373.** а) 9; б) 0,24; в) $\frac{8}{15}$; г) $1\frac{3}{8}$. **374.** а) 180; б) 50; в) 48; г) 28; д) 30; е) 6; ж) 24; з) 2,6. **375.** а) 60; б) 60; в) 42; г) 32. **376.** д) 12; е) 12. **377.** д) 6; е) $\frac{15}{16}$. **383.** д) 4,5; е) 3,1; ж) 0,22; з) 0,58. **384.** в) 0,27; г) 3,9. **385.** ж) 15; з) 2. **392.** а) 130; б) 7. **396.** в) $3c$; г) $-5y$; д) $-6x$; е) $3y$; ж) $-10x$; з) $-2a$. **401.** ж) 45; з) 392. **402.** д) 48; е) 1125; ж) 112; з) 675. **403.** а) 144; б) 225; в) 168; г) 825. **404.** а) 48; б) 135; в) 504.
418. $\frac{2+x}{x}$. **419.** В первый день переплели 36 книг, во второй — 48 книг, в третий — 60 книг. **420.** а) –2,5; б) –7,2. **421.** б) $7\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{3}$; д) $2\sqrt{2}$. **422.** д) $-3\sqrt{2}$; е) $3\sqrt{2}$. **424.** в) 6; е) $42-8\sqrt{5}$. **425.** а) 14; б) 8. **426.** д) 6; е) –19; ж) 38; з) 2. **429.** в) $-\frac{1}{\sqrt{x}+2}$; е) $\frac{1}{2\sqrt{x}+3\sqrt{y}}$. **430.** д) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; е) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$. **440.** 20.
441. а) –1; б) $8\frac{1}{8}$. **444.** а) $\sqrt{5}+1$; б) $\sqrt{7}-2$. **445.** а) 3; б) 5. **446.** а) $\sqrt{54}+1$; б) $\sqrt{65}-\sqrt{21}$. **447.** а) $\sqrt{10}$; б) 4. **449.** б) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$. **450.** 1. **452.** а) $-\sqrt{2}$; б) 1.
453. а) $\sqrt{a-1}+1$; б) 2. **460.** в) 0,(846153); г) 0,(037); д) 0,0(571428); е) –0,3(18); ж) 0,7(6); з) 0,2(18). **463.** г) $\frac{1}{8}$; д) 10,22. **465.** б) $\frac{1}{3}$; д) 40,5. **466.** 49. **471.** а) При $x > 0$; б) при $x > 0$; в) при $x > 0$, кроме $x = 1$. **476.** в) 9,1; г) 1,08.
477. а) 8,5; б) $\frac{7}{96}$; в) $\frac{15}{29}$; г) $\frac{77}{135}$. **478.** а) 45; б) 0,9; в) 100; г) 0,04. **481.** г) 3,2;

д) 8,1; е) 0,001; ж) −64; з) 0,025. **487.** г) $-0{,}5py^3$; е) $\frac{4a^6}{b^5}$; ж) $\frac{2x}{y^3}$; з) $-\frac{c^3}{3a}$. **490.** а) $|a|\sqrt{15}$; б) $21x^2\sqrt{3}$; в) $0{,}5x\sqrt{6x}$; г) $3a^2\sqrt{a}$; д) $3a|a|\sqrt{2b}$; е) $-4m^3\sqrt{3a}$. **493.** б) $x+\sqrt{xy}$; г) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$; е) $3a-\sqrt{ab}-2b$; з) $6x-5x\sqrt{2}$. **494.** в) $m\sqrt{m}-n\sqrt{n}$; г) $x^3+y\sqrt{y}$. **497.** в) 2; г) $3\frac{1}{4}$. **501.** 2. **502.** а) $x+\sqrt{xy}+y$; б) $\frac{1}{a-\sqrt{ab}+b}$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{x}$; г) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{3}}$. **503.** а) $\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; д) $\sqrt{3}$; е) $\sqrt{10}-\sqrt{3}-1$. **505.** а) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-y}$; б) $\frac{27-a\sqrt{a}}{9-a}$; в) $\frac{1+8x\sqrt{x}}{1-4x}$; г) $\frac{a^3b\sqrt{b}-8}{a^2b-4}$. **506.** а) $\frac{x-y}{x+\sqrt{xy}}$; б) $\frac{a^2-b}{a^2\sqrt{b}-ab}$; в) $\frac{49-a}{343+a\sqrt{a}}$; г) $\frac{mn-1}{mn\sqrt{mn}-1}$. **507.** а) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; б) $\frac{\sqrt{5}-3\sqrt{3}+2\sqrt{15}+4}{22}$. **508.** При $x=0$. **509.** а) $-\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}$; в) $\sqrt{3}$; г) $3{,}5\sqrt{6}$. **510.** а) $-\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{ab}(a-b)$.

Глава III

518. а) 0; −1,5; б) $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$; $\frac{1}{3}\sqrt{6}$; в) 0; $\frac{4}{5}$; г) 0; $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. **521.** а) 0; 2; б) −1; 1; в) 0; $\frac{1}{4}$; г) 0. **522.** а) 0; 1; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; в) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; г) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **523.** а) 0; −9; б) $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\frac{1}{2}\sqrt{5}$; в) −2; 2; г) корней нет. **524.** 2 и 3. **525.** 40 м и 20 м. **526.** 12 см. **527.** ≈ 2,5 ч. **528.** ≈ 4 с. **529.** 280 м. **530.** 20 и 15 дюймов; ≈ 50,8 см и ≈ 38,1 см. Указание. Обозначьте стороны прямоугольника через $4x$ и $3x$. **532.** 3,96; 59. **534.** а) 1; $1\frac{1}{3}$; б) 0,6; 1; в) 2; $2\frac{1}{3}$; г) 2; 2,5; д) 0,2; 1; е) −3; $2\frac{3}{4}$; ж) −2; 12; з) −10; 9. **535.** а) $-\frac{1}{7}$; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{3-\sqrt{29}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$; в) корней нет; г) $\frac{1}{9}$; д) −8; 19; е) корней нет. **536.** а) 0,2; 2; б) −6; 2,5; в) $1\frac{2}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{7}$; д) $\frac{1-\sqrt{41}}{4}$; $\frac{1+\sqrt{41}}{4}$; е) $\frac{1}{4}$. **537.** а) При $x=5$ и $x=6$; б) при $x=\frac{7-\sqrt{41}}{2}$ и $x=\frac{7+\sqrt{41}}{2}$; в) при $x=0$ и $x=3$; г) при $x=-1$ и $x=1$. **538.** а) При $x=2$ и $x=9$; б) при $x=0{,}5$ и $x=2$. **539.** а) 2; $2\frac{2}{3}$; б) 0,2; 3; в) −10; 8; г) −1; 23; д) 3,5; 5,5; е) −1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{10-\sqrt{2}}{7}$; $\frac{10+\sqrt{2}}{7}$; з) $5-5\sqrt{2}$; $5+5\sqrt{2}$; **540.** а) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{4}$; б) $-1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) −6; 14; д) $-3-2\sqrt{7}$;

$-3 + 2\sqrt{7}$; е) -6; 0,8; ж) 17; з) $-6\frac{2}{3}$; -4. **541.** а) $-\frac{1}{2}$; 3; б) 1; $1\frac{2}{3}$; в) -1; $-0,8$; г) $\frac{1}{6}$; д) корней нет; е) -11; 2; ж) 4; 8; з) 0,7; 0,9. **542.** а) $-0,2$; 2; б) -7; 2; в) $3 - 3\sqrt{2}$; $3 + 3\sqrt{2}$; г) -4; 5; д) 16; 36; е) -1; $2\frac{7}{15}$; ж) $\frac{1}{5}$; з) $-1\frac{1}{4}$; 1. **543.** а) 1; 25; б) -10; $\frac{1}{3}$; в) -8; 12; г) $\frac{1}{3}$; 3; д) $20 - 10\sqrt{5}$; $20 + 10\sqrt{5}$; е) корней нет. **544.** а) $-0,2$; 1,7; б) $\frac{7-\sqrt{13}}{6}$; $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; в) $5 - \sqrt{5}$; $5 + \sqrt{5}$; г) -4; 0,5. **545.** а) -8; 3; б) $1\frac{3}{4}$; 4; в) -91; 87; г) -59; 53. **546.** а) $-2\frac{2}{3}$; -2; б) $\frac{1}{15}$; в) 0; 2; г) -2; 3. **547.** а) -1; 23; б) 2; $2\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{26}$; 1; г) -5; -3. **548.** а) $x_1 \approx -0,36$, $x_2 \approx 0,56$; б) $x_1 \approx -2,78$, $x_2 \approx -0,72$; в) $y_1 \approx -1,26$, $y_2 \approx 1,59$; г) $y_1 \approx -9,20$, $y_2 \approx 1,20$. **550.** а) $x_1 \approx 1,35$, $x_2 \approx 6,65$; б) $y_1 \approx 0,78$, $y_2 \approx 3,22$. **551.** а) -1; $2\frac{6}{7}$; б) -7; 5; в) $-0,2$; 1,8; г) корней нет; д) 25; е) -9; 3. **552.** а) 7; б) 0,6; 2; в) $-\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$. **555.** а) Не существует; б) не существует; в) a — любое число. **556.** 7,5. **557.** а) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; б) $2 + 3\sqrt{5}$. **560.** 32 см. **561.** 140 м. **563.** 8 см, 15 см. **564.** 11 и 12. **565.** 30 см. **566.** 5 см или 8 см. **567.** 15 см. **568.** 26 рядов. **569.** 16 или 48 обезьян. **570.** 50 обезьян. **571.** В десятиугольнике. **572.** 9 команд. **573.** 10 участников. **574.** 10 см. **575.** 16, 17, 18 или -18, -17, -16. **576.** б) $\frac{x-4}{3-x}$. **577.** 1. **578.** а) 0; 6; б) $-1\frac{3}{4}$; 0. **585.** -5; $p = -2$. **586.** 0,5; $q = 6,25$. **587.** 0,6; $b = -43$. **588.** -2; $c = -106$. **589.** 35. **590.** $-8,75$. **592.** -28. **596.** а) 0; $-\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; в) -6; 0,8; г) -2; $-\frac{2}{9}$; д) при любом x; е) $-1\frac{2}{5}$; $\frac{1}{7}$. **597.** 9,6 м^2. **598.** 90 см. **599.** 16 см и 30 см. **600.** г) 1; д) -27; -1; е) $-0,2$; ж) $-0,5$; 1; з) $\frac{2}{9}$; и) 0; $\frac{1}{6}$. **601.** а) $-12,5$; б) 3; 4; в) 6; г) -1; 3,5; д) -2; $1\frac{1}{3}$; е) 0; -8; ж) 1; 1,5; з) 0; 1,5. **602.** в) $\frac{2}{11}$; г) 1; 10; д) -1; 1; е) 1; 2; ж) $-3\frac{1}{4}$; 1; з) $-3,5$; 5. **603.** а) $3 - \sqrt{5}$; $3 + \sqrt{5}$; б) -6; 5; в) $-4\frac{1}{3}$; г) -9; 1; д) корней нет; е) 4. **605.** а) 6; б) -3; $\frac{2}{3}$; в) корней нет; г) 5; д) -6; 6; е) -4; 4. **606.** а) 2; б) 1; в) -11; г) 6. **607.** а) -3; б) $-1\frac{2}{3}$; 0; в) 3; г) -3; 3; д) 9; 13; е) $1\frac{1}{3}$; $2\frac{1}{3}$. **608.** а) 1; 7; б) $1 - \sqrt{14}$; $1 + \sqrt{14}$; в) $\frac{5-\sqrt{17}}{4}$; $\frac{5+\sqrt{17}}{4}$; г) $-\frac{1}{9}$; 1. **609.** б) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{7-3\sqrt{6}}{10}$; $\frac{7+3\sqrt{6}}{10}$. **610.** а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) -3; 3. **615.** а) $\sqrt{y}$; б) $\sqrt{y}$. **617.** $\frac{2}{5}$. **618.** 60 км/ч и 40 км/ч. **619.** 12 км/ч и 10 км/ч. **620.** 80 км/ч и 70 км/ч.

621. 80 км/ч. **622.** 30 ц с гектара. **623.** 20 р. **624.** 220 акций. **625.** 7 человек. **626.** 12 человек. **627.** 6 км/ч или 5 км/ч. **628.** 2,5 км/ч. **629.** 2 км/ч. **630.** 500 г. **631.** 60 г. **632.** 15 ч и 10 ч. **633.** 7 ч. **634.** 10 км/ч. **635.** 50 км/ч. **637.** а) 0,1; б) 3,5. **638.** 16. **642.** При $a = 2$ x — любое число; при $a \neq 2$ $x = a^2 - 9$. **643.** $\dfrac{2 \pm \sqrt{4-2b}}{2}$ при $b < 2$; 1 при $b = 2$; корней нет при $b > 2$. **644.** а) $4a$ и a при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$; б) $3a$ и $\dfrac{a}{3}$ при $a \neq 0$; 0 при $a = 0$. **645.** а) 6 и −6; б) 20 и −20; в) 0 и 9; г) 0 и $-\dfrac{1}{8}$. **646.** 5 при $a = 1$. **647.** −1 при $a = 1$; −1 и $\dfrac{a+1}{1-a}$ при $a \neq 1$. **648.** $2k - 2$, $2k + 3$. **649.** $b = 4$. **650.** а) 0; 1; б) 0; 6,8; в) −1,2; 1,2; г) 0. **654.** а) −1; $-\dfrac{3}{4}$; б) −8; 7; в) −7; 8; г) 1,6; 2; д) $-3\dfrac{1}{8}$; 3; е) −1; $4\dfrac{2}{3}$; ж) $-5\dfrac{2}{3}$; 2; з) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **655.** а) −1,2; 0,2; б) $-4\dfrac{2}{3}$; $-1\dfrac{2}{3}$; в) $2\dfrac{2}{3}$; 4; г) $-2\dfrac{3}{11}$; −1; д) $-\dfrac{3}{5}$; $-\dfrac{2}{5}$; е) −1; 1; ж) −2,5; 2,5; з) при любом x. **660.** 10, 11, 12, 13, 14 или −2, −1, 0, 1, 2. **661.** −2, 0, 2 или 6, 8, 10. **662.** 7 и 8. **663.** 4 см и 10 см. **664.** 1 см. **665.** 0,25 м. **666.** 60 или 40 пистолей. **667.** 0,36 $м^3$ или 0,81 $м^3$. **668.** 54 см и 36 см. **669.** 18 и 17. **670.** 13 и 11. **671.** а) $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; б) $-6\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; в) $3-\sqrt{2}$; $3+\sqrt{2}$; г) $5-3\sqrt{2}$; $5+3\sqrt{2}$. **678.** $b = \pm 12$. **679.** 21 или −21. **680.** $c = 3{,}12$. **681.** $b = -2$, $c = 0$. **682.** $b = 1$, $c = -2$. **684.** 36. **685.** 42 или −42. **688.** а) $x^2 + 3px + 9q = 0$; б) $x^2 + (p-4)x + (q - 2p + 4) = 0$. **689.** $qx^2 - (p - 2q)x + q = 0$. **690.** а) 11; 13; б) −14; 5; в) −3; 7; г) −5; $4\dfrac{1}{3}$; д) 12; е) корней нет; ж) −5; 3; з) корней нет. **695.** а) $\dfrac{-5-\sqrt{77}}{4}$; $\dfrac{-5+\sqrt{77}}{4}$; б) −1,5; 1; в) корней нет; г) 9; д) 0; е) $-\dfrac{1}{3}$; ж) $2-\sqrt{35}$; $2+\sqrt{35}$; з) 0; −1,5. **696.** а) $\dfrac{2}{3}$; 1; б) 0,4; 0,5. **698.** 10 ч. **699.** 9 ч. **700.** 50 км/ч. **701.** 60 км/ч. **702.** 2 км/ч. **703.** 3 км/ч. **704.** 3 км/ч. **705.** 2,4 км/ч или 3 км/ч. **706.** 3 км/ч. **707.** 50 км/ч. **708.** 40 км/ч. **709.** 4 ч 40 мин. **710.** 160 км или 200 км. **711.** 450 км. **712.** 18 км/ч. **713.** 48 км/ч или 9 км/ч. **714.** 60 см и 80 см. **715.** 10 костюмов. **716.** 32 пылесоса. **717.** 24 кг и 36 кг. **718.** 25 кг или 12 кг. **719.** 15 дней и 10 дней. **720.** 15 дней и 10 дней. **721.** 12 ч. **722.** 25 ч и 20 ч. **723.** 15 мин и 10 мин.

Глава IV

739. Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **742.** Коля. **743.** $3\dfrac{1}{15}$. **744.** а) $\dfrac{5-x}{7}$; б) 1. **745.** а) 1; 5; б) 0,3; 2. **763.** $\dfrac{1}{16}$; 22; 0. **764.** а) −1; 1; б) 2; в) −6; 3; г) −1; 5. **779.** 6×6 дм. **780.** $\dfrac{1}{6}$. **783.** а) 0,13; б) 4;

в) 0,047; г) 0,002. **787.** $407{,}4 \leqslant a \leqslant 432{,}6$. **792.** $\approx 1\%$. **798.** $q = -48$. **803.** а) Отрезок CB; б) отрезок AD. **807.** а) Множество B; б) множество A. **810.** -3; $\frac{2}{3}$. **811.** 12 ц и 10 ц. **823.** а) -9; б) 16; в) 31; г) 7. **825.** а) $(5; 8)$; б) $[-4; 4]$; в) $(7; +\infty)$; г) $(-\infty; 6)$. **829.** а) $\frac{1}{x^2}$; б) $-\frac{1}{2a^4}$. **831.** 40 км/ч; 45 км/ч. **832.** $\frac{3}{4}$. **836.** а) $(5; +\infty)$; б) $(4; +\infty)$; в) $(-\infty; -1]$; г) $(-\infty; 3]$; д) $(-\infty; 0{,}15)$; е) $\left[\frac{4}{9}; +\infty\right)$; ж) $(-\infty; -0{,}25)$; з) $(-\infty; 0]$; и) $(-8; +\infty)$; к) $(0; +\infty)$; л) $(18; +\infty)$; м) $(7; +\infty)$. **837.** а) $(-\infty; 8{,}5)$; б) $[-0{,}6; +\infty)$; в) $(4; +\infty)$; г) $(7{,}5; +\infty)$; д) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; е) $(1{,}8; +\infty)$; ж) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; з) $(-\infty; -2{,}4]$; и) $(-\infty; 12)$; к) $(0; +\infty)$; л) $[-30; +\infty)$; м) $[-20; +\infty)$. **840.** а) $(-\infty; 0{,}4)$; б) $(-\infty; -0{,}4)$; в) $[-5; +\infty)$; г) $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$; д) $(-1{,}4; +\infty)$; е) $(-\infty; -1]$; ж) $(-\infty; 12{,}6]$; з) $[-13; +\infty)$. **841.** а) $(-\infty; 1)$; б) $(-\infty; 2)$; в) $[6; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; д) $(-\infty; 0)$; е) $(-\infty; 9)$; ж) $(-13; +\infty)$; з) $\left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **842.** а) При $x > \frac{1}{2}$; б) при $y > 7$; в) при $c < -25$. **843.** а) При $a < 2{,}5$; б) при $p > 5$. **844.** а) $\left(-\infty; -\frac{7}{8}\right]$; б) $(9; +\infty)$; в) $(-\infty; -3{,}1]$; г) $(-\infty; 0{,}8]$; д) $\left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right)$; е) $(-\infty; 22{,}5)$; ж) $(-\infty; 2]$. **845.** б) $[0; +\infty)$; в) $(1; +\infty)$; г) $\left[2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; д) $(-\infty; 4{,}7]$; е) $[4{,}8; +\infty)$. **846.** а) $(6; +\infty)$; б) $(0; +\infty)$; в) $(-\infty; -5]$; г) $(-3; +\infty)$. **847.** а) $(-\infty; 2)$; б) $(2; +\infty)$; в) $(-0{,}4; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{2}{15}\right)$. **848.** а) $\left(-\infty; 14\frac{1}{3}\right)$; б) $\left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 14]$; г) $(-17; +\infty)$. **849.** а) $(2{,}5; +\infty)$; б) $(-\infty; 6)$; в) $[0; +\infty)$; г) $(3; +\infty)$; д) $(-4; +\infty)$; е) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; ж) $\left(-\infty; 1\frac{5}{7}\right]$. **850.** а) $[0; +\infty)$; б) $\left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $\left(-\infty; 2\frac{3}{4}\right]$; д) $[14; +\infty)$; е) $(-\infty; 20{,}5)$. **851.** а) При $y < 3$; б) при $y > 7$; в) при $y > \frac{3}{17}$; г) при $y < 0{,}1$. **852.** а) $(-\infty; 6)$; б) $\left[1\frac{5}{7}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; 12)$; г) $(2; +\infty)$; д) $\left[-1\frac{2}{3}; +\infty\right)$; е) $(0; +\infty)$. **853.** а) $(-\infty; 0{,}2)$; б) $(-\infty; 0{,}5]$; в) $(-\infty; 40]$; г) $(-\infty; -10]$. **854.** б) $\left(-\infty; \frac{2}{13}\right]$; в) $[1{,}5; +\infty)$; г) $(-\infty; 3{,}5]$; д) $(-\infty; -10)$; е) $(9; +\infty)$. **855.** а) $\left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$; б) $[-5; +\infty)$; в) $(-\infty; -0{,}6]$; г) $\left(-\infty; -3\frac{5}{6}\right)$. **856.** а) При $a > 0{,}7$;

б) при $b < 3$. **857.** а) x — любое число; б), в), г) решений нет. **859.** а) При $x \geqslant 2$; б) при $a \leqslant \frac{2}{3}$; в) при $a \geqslant -\frac{1}{3}$; г) при $a \leqslant 1{,}4$; д) при $x \geqslant 0{,}2$; е) при $x \geqslant 6$. **860.** а) $(-\infty;\ -8) \cup (-8;\ 0{,}5]$. **861.** а) 3; б) 24. **862.** а) 1; 2; 3; 4; б) 1; 2. **863.** $(-\infty;\ -5{,}2)$. **864.** $\left(1\frac{1}{3};\ 4\right) \cup (4;\ +\infty)$. **865.** Меньше 2 см. **866.** Меньше 12,15 дм. **867.** 7 книг. **868.** 755 р. **869.** Не более $26\frac{2}{3}$ км. **870.** 3. **871.** а) 1; 4; б) 0; 1. **873.** 12 км/ч. **877.** а) $(6;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -1)$; в) $\left(0;\ 3\frac{1}{3}\right)$; г) решений нет. **878.** а) $(0{,}8;\ +\infty)$; б) $[2;\ 4]$; в) $\left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$; г) $(0{,}1;\ 0{,}2)$. **879.** а) $[2;\ 2{,}5]$; б) $(1{,}5;\ 3)$; в) $\left(13\frac{1}{3};\ 25\right)$; г) $\left(-\infty;\ \frac{4}{9}\right]$. **880.** а) $(-12;\ 2]$; б) решений нет; в) $(0;\ 15)$; г) $(-\infty;\ -3)$. **881.** а) $(-1;\ 0{,}8)$; б) $(-\infty;\ -1{,}5]$; в) $\left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; г) $[3;\ 6{,}7)$. **882.** а) $(-\infty;\ 2{,}4)$; б) решений нет; в) $\left[-8;\ 1\frac{1}{3}\right)$; г) $[1{,}5;\ +\infty)$. **883.** а) $(-\infty;\ 1]$; б) $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$; в) $[3;\ 6]$; г) $[-1;\ 1{,}5]$. **884.** а) $[2{,}5;\ 11) \cup (11;\ +\infty)$; б) $[0{,}5;\ 2) \cup$ $\cup\ (2;\ +\infty)$. **885.** а) $(3;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -3)$; в) $[-11;\ 3]$; г) решений нет. **886.** а) $\left(2;\ 3\frac{4}{7}\right)$; б) $(0{,}1;\ +\infty)$; в) $(-0{,}24;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1{,}8)$. **887.** а) $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) $-1, 0, 1, 2, 3$; г) $-2, -1, 0$. **888.** а) 0, 1, 2, 3; б) 4, 5, 6, 7; в) 1; г) 1. **889.** а) $(-\infty;\ 2{,}8)$; б) решений нет. **890.** а) $(-\infty;\ 6)$; б) $(1;\ 15)$; в) $[0{,}6;\ 5]$; г) $(2;\ 16]$. **891.** а) $\left(\frac{1}{13};\ 9\right)$; б) $(-2;\ -1)$; в) решений нет; г) $\left[\frac{2}{11}; 2\right]$. **892.** а) $(-1;\ 2)$; б) $(-12;\ 17)$; в) $(0{,}5;\ 2)$; г) $(-1;\ 3)$. **893.** а) $\left(-2\frac{5}{7};\ 5\right]$; б) $[-11;\ 7)$; в) $\left[-5;\ \frac{1}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{2}{3};\ 2\right]$. **894.** а) $[-1;\ 2)$; б) $[3;\ 9]$; в) $(-0{,}7;\ 1{,}1)$; г) $\left(-1\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$. **895.** а) При $1\frac{1}{3} < y < 2$; б) при $0{,}5 \leqslant b \leqslant 6{,}5$. **896.** $-4 < a < 4$. **897.** $b < -1\frac{1}{3}$. **899.** а) $(-\infty;\ 2)$; б) $(1;\ 4)$. **900.** а) $(1;\ 7)$; б) $(1;\ 3)$. **901.** а) $x \leqslant 0{,}48$; б) $x > 2{,}2$; в) $x \neq \frac{2}{3}$. **902.** 1, 2, 3, 4, 6, 12. **904.** 10 км/ч и 15 км/ч. **907.** Указание. Можно воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел. **910.** Указание. Сравните квадраты левой и правой частей неравенства. **912.** Указание. Воспользуйтесь соотношениями вида $\sqrt{4x+1} \leqslant \sqrt{4x+1+4x^2} = |2x+1|$. **913.** Указание. Можно воспользоваться тем, что $\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} > \sqrt{a+1} -$

$-\sqrt{a}$ при $a > 1$. **914.** Не успел. **922.** Смирнов. **930.** а) $-6 < a + 2b < -3$; б) $-11{,}5 < \frac{1}{2}a - b < -9$. **931.** $5{,}2 < \frac{AB}{2} < 5{,}25$. **932.** $4{,}8 \leqslant \frac{a+c}{2} \leqslant 4{,}9$. **940.** а) $(-\infty; -60)$; б) $(4{,}8; +\infty)$; в) $(0{,}56; +\infty)$; г) $\left(-\infty; \frac{1}{16}\right]$; д) $(-\infty; -1)$; е) $\left(1\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **941.** а) $(-\infty; -115)$; б) $(0{,}2; +\infty)$; в) $(-\infty; 15)$; г) $(-\infty; 1{,}4)$. **942.** а) $(-\infty; 0{,}325)$; б) $(-1; +\infty)$. **943.** а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 3, 4, 5. **944.** а) Таких значений нет; б) при любом значении x. **945.** а) $(-\infty; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$. **946.** а) При $a > 0$; б) при $a > 2$; в) при $a > -3$; г) при $a > -7$. **947.** а) При $b < 0$; б) при $b < -4$; в) при $b < -3$; г) при $b < -0{,}2$. **948.** а) При $m \geqslant 8$; б) при $m < 2$; в) при $m \leqslant -6$; г) при $m < 3{,}5$. **950.** а) Не более 5. **951.** Более 6 км/ч. **952.** Более 18 км/ч. **954.** а) $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right)$; б) $(0{,}1; 5)$; в) решений нет; г) $(0{,}8; +\infty)$; д) $(-\infty; -0{,}2)$; е) $\left(1\frac{5}{11}; +\infty\right)$. **955.** а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; б) -10; в) 1; г) 2, 3, 4, 5. **956.** а) $(-3; 6)$; б) $(1{,}5; 2{,}5)$. **957.** а) При $1{,}5 < x < 4{,}5$; б) при $5 \leqslant x \leqslant 15$. **958.** а) $\left(0; \frac{1}{6}\right)$; б) положительных решений нет. **959.** а) $(-1; 0)$; б) $(-5; 0)$. **960.** $a > 3{,}5$. **961.** $-3 < b < 5$. **962.** Более 10 км, но менее $16\frac{1}{4}$ км. **963.** Более 60 км/ч, но не более 90 км/ч.

Глава V

970. г) $\frac{27}{64}$; д) $-39\frac{1}{16}$; е) $-\frac{4}{25}$. **977.** а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{16}$; в) $\frac{1}{18}$; г) $\frac{3}{13}$; д) 6; е) 125. **980.** в) $\frac{1-a^2b^2}{ab}$; г) $\frac{2x^2y^2-3xy-2}{xy}$. **981.** а) $\frac{1}{ab}$; б) $\frac{a+b}{a^2b^2(b-a)}$. **982.** а) $(2; +\infty)$; б) $(-\infty; 2)$. **983.** При $n = 1$ и $n = 49$. **986.** б) 3; г) 25; е) 0,001. **991.** а) 64; б) $\frac{1}{8}$; в) 8; г) 4. **993.** а) 1; б) 27; в) 1000; г) $\frac{1}{25}$; д) 2; е) 1; ж) 81; з) 15 625. **994.** а) 5; б) 1; в) $\frac{1}{36}$; г) 144; д) $\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{81}$. **995.** а) 5; б) $\frac{2}{3}$. **998.** а) x^{-2}; б) x^5; в) x^{n+7}; г) x^{4-n}. **1000.** а) -1; б) 6. **1001.** а) 0,224; б) 125. **1005.** а) $\frac{1}{3}x^4y^7$; б) $81ab^7$; в) $15x^5y^5$; г) $\frac{5}{4}p^5q^{10}$. **1006.** а) $\frac{1}{3}xy^{11}$; б) $\frac{7}{5}a^4b^4$; в) $5c^3p^3$; г) $2x^{-8}y^9$. **1007.** а) $4x$; б) $3b$; в) $4a^4b^2c^4$; г) $\frac{8}{3}x^{-2}y^5z$. **1008.** а) $27x^3y$; б) $20a^6b^{-2}$; в) $4a^{-10}b^{12}$; г) $\frac{1}{2}x^{-5}y^6$. **1009.** $n = 1$. **1010.** -4; 2. **1011.** а) $(-\infty; 0)$; б) $(0; +\infty)$. **1012.** $\frac{1}{11}$. **1020.** а) $4{,}55 \cdot 10^5$; б) $2{,}288 \cdot 10^2$. **1024.** $1{,}404 \cdot 10^3$ кг. **1025.** 1. **1026.** При $m = 18$.

1027. −3, −2, −1. **1032.** ≈ 10 акций; 98 акций; 2 акции. **1034.** ≈ 3; 2. **1039.** 84. **1040.** (0,25; +∞). **1041.** −17. **1058.** −0,36. **1059.** [0,5; 15). **1068.** а) $a = 51$, $b = 256$. **1069.** а) x_0^2, x_0, x_0^0, x_0^{-1}, x_0^{-2}; б) x_0^{-2}, x_0^{-1}, x_0^0, x_0, x_0^2. **1070.** а) Общих точек нет; б) две точки; в) четыре точки; г) одна точка. **1071.** а) Один; б) два; в) один; г) не имеет корней. **1072.** а) −1600; б) −0,08; в) −1000; г) 11; д) 7; е) 5. **1074.** а) $\frac{x^3 - y^3}{x^2y^2}$; б) $\frac{xy + y^2}{x^2}$; в) $\frac{n^2}{(m-n)^2}$; г) $\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}$. **1075.** а) $\frac{1}{x^2y + xy^2}$; б) $-(a + b)$. **1081.** а) x^{17}; б) a^{12}. **1083.** а) 3^n; б) 2^{-n}. **1085.** $n = 6$. **1087.** а) $2{,}38 \cdot 10^4$; б) $1{,}62 \cdot 10^{-1}$; в) $3 \cdot 10^3$; г) $\approx 8{,}67 \cdot 10^{17}$.

Задачи повышенной трудности

1099. а) $\frac{x^2 + ax + a^2}{x + a}$; б) $\frac{2a + 1}{4a^3 + 2a^2 + a}$. **1100.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $u = -1$, $v = -2$. **1102.** $\frac{8}{21}$. **1103.** Цифрой 2. **1104.** $x = 1$, $y = 2$. **1105.** $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$, $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$. **1106.** 12, 18, 24, 27, 36, 45, 48. **1107.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$. Указание. Докажите, что сумма этих дробей больше 1, но меньше 3, т. е. равна 2. **1108.** −7, −6, −3, 2, 4, 9, 12, 13. **1109.** 0, 2, 4. **1110.** $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$. **1111.** $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$, где p и q — целые числа, причем $p \neq 0$, $q \neq 0$, $|p| \neq 1$, $|q| \neq 1$. **1113.** $x = 35$, $y = 34$ или $x = 13$, $y = 10$. **1115.** Указание. Возведите обе части уравнения $(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2}) = 1$ в n-ю степень ($n \in N$). **1116.** При $m = -6$. **1117.** $x_1 = a - 1$, $x_2 = a + 1$. **1118.** 5 при $a = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{17})$. **1119.** $p = -16$ или $p = 16$. **1120.** При $a = 2$. **1123.** 160 км. **1124.** 10 м. **1125.** 60 ч. **1126.** 10 км. **1127.** 72 км. **1128.** 4,5 ч или 3,6 ч. **1129.** В 1,2 раза. **1130.** За 12 ч и 15 ч. **1131.** За 28 ч и 21 ч. **1132.** 41. **1133.** $x_1 = 18$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$, $x_4 = 10$ или $x_1 = -12$, $x_2 = -18$, $x_3 = -10$, $x_4 = -15$. **1134.** Через 2 ч. **1145.** 10 точек.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА IV. НЕРАВЕНСТВА

Учебное издание

Макарычев Юрий Николаевич
Миндюк Нора Григорьевна
Нешков Константин Иванович
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

УЧЕБНИК ДЛЯ 8 КЛАССА
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЙ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Г. Войлокова*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художники *В. А. Коршунов, В. В. Костин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *К. В. Солоненко*
Технический редактор *А. Г. Хуторовская*
Корректор *Н. И. Князева*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с диапозитивов 17.05.07. Формат $70 \times 90\ ^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,77 + 0,45 форз. Доп. тираж 50000 экз. Заказ № 3828.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46.